Actividades modélicas

Eje Geometría y Medida

1º AÑO

Autor: Sergio Damián Viñolo

MENDOZA MEJORA
APRENDIENDO MATEMÁTICA

DGE MENDOZA

Aprendizaje

2. Elaboración de argumentos sobre las condiciones necesarias y suficientes para la congruencia de triángulos.

Indicadores de avance:

2.1. Explica la relación de congruencia de triángulos, a través de la comparación de lados y ángulos.

2.2. Reconoce y aplica los criterios de congruencia de triángulos (LLL, LAL, ALA) en la resolución de problemas geométricos, justificando con argumentos claros y válidos.

2.3. Evalúa y valida la congruencia de triángulos en figuras geométricas a través de análisis de sus lados y ángulos, estableciendo las condiciones necesarias y suficientes para dicha congruencia.

ACTIVIDAD EN BUSCA DE CRITERIOS PARA TRIÁNGULOS ÚNICOS
Juego “Dígalo con triángulos”

Materiales
55 tarjetas, todas con la imagen de un triángulo y datos sobre los mismos. Entre estas habrá:

- 10 que den información sobre la medida de los tres lados;
- 10 que den información sobre la medida de dos lados y la amplitud del ángulo comprendido entre estos;
- 10 que den información sobre la medida de un lado y la amplitud de cada uno de los ángulos adyacentes a ese lado;
- 5 que den información sobre la medida de un lado;
- 5 que den información sobre la medida de dos lados;
- 5 que den información sobre la medida de un lado y un ángulo;
- 5 que den información sobre la amplitud de un ángulo;
- 5 que den información sobre la amplitud de dos ángulos;

Instrumentos geométricos (regla, compás, transportador), lápiz, hojas en blanco y un cronómetro.

Organización de la clase
✓ **Formación de equipos:** Divida la clase en grupos de 6 estudiantes. Dentro de cada grupo, formar dos equipos de 3 integrantes.

✓ **Preparación de materiales:** Cada equipo recibe instrumentos geométricos y hojas blancas. Mezcla las tarjetas y colócalas boca abajo en una pila central.

Reglas del juego
1. Turnos y elección de tarjeta: Por turnos, un jugador de cada equipo toma una tarjeta y, sin mostrarla al resto, lee en voz alta los datos que se brindan sobre el triángulo.

2. Construcción del triángulo: Siguiendo las instrucciones de la tarjeta, ambos equipos deben construir un triángulo -haciendo uso de los instrumentos que dispone- que cumpla con las condiciones dadas.

3. Cronología y puntuación:
- Cada construcción tiene un tiempo límite de **5 minutos.**
- El equipo que termina primero detiene el cronómetro e informa su construcción.

    - Si la construcción es correcta, **gana 2 puntos.**
    - Si es incorrecto, **pierde 1 punto.**
- El otro equipo puede continuar dentro del tiempo restante:
    - Si realiza una construcción válida y distinta, **gana 1 punto.**
- Si ningún equipo completa la construcción correctamente, no se otorgarán puntos.

4. Fin del juego: El juego continúa hasta que uno de los equipos alcanza **10 puntos.**

a | Armá tu equipo y desafiá en este juego a otros compañeros.

b | Para después de jugar…
Reflexioná solo, o con tu compañero de banco y respondé las siguientes preguntas teniendo en cuenta tu experiencia en el juego:

1. Daniela afirma que, con su tarjeta, en la que se indica que dos lados del triángulo miden 5cm y 7cm, sólo podía construirse un único triángulo. Valentín cree que no es cierto y que, si se conociera la medida del tercer lado, entonces sí sería único. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

2. Si se da como información que dos de los lados de un triángulo miden 5cm y 7cm respectivamente y además, se conoce la medida del ángulo comprendido entre estos dos lados, ¿cuántos triángulos distintos se pueden construir?

3. En una jugada, los datos indicaron que un lado medía 3cm y dos ángulos interiores medían 50° y 100° respectivamente. ¿Es posible que ambos equipos sumen puntos? Explicá por qué.

4. Si una tarjeta indica que el triángulo es equilátero, ¿es este dato suficiente para que solo un equipo gane puntos? ¿Por qué? Si no lo es, incluí otro dato que permita que sea suficiente.

5. Mariano opina que, si una tarjeta brinda solo dos datos sobre un triángulo, ambos equipos podrán sumar puntos. ¿Estás de acuerdo con su opinión? ¿Por qué? ¿Y alcanzan para que sólo un equipo pueda sumar puntos?

c | En una nueva versión del juego, se incluyen tarjetas “comodín”. Estos permiten que el jugador invente los datos de un triángulo para el resto de los equipos.

Así, Lucía cree que, al elegir los datos, podrá asegurarse de que su equipo construya correctamente el triángulo más rápido que sus contrincantes, y decide pensar en una estrategia ganadora.

¿Qué datos elegirías si estuvieses en el lugar de Lucía? Justificá cómo esos datos garantizan que solo su equipo sume puntos.

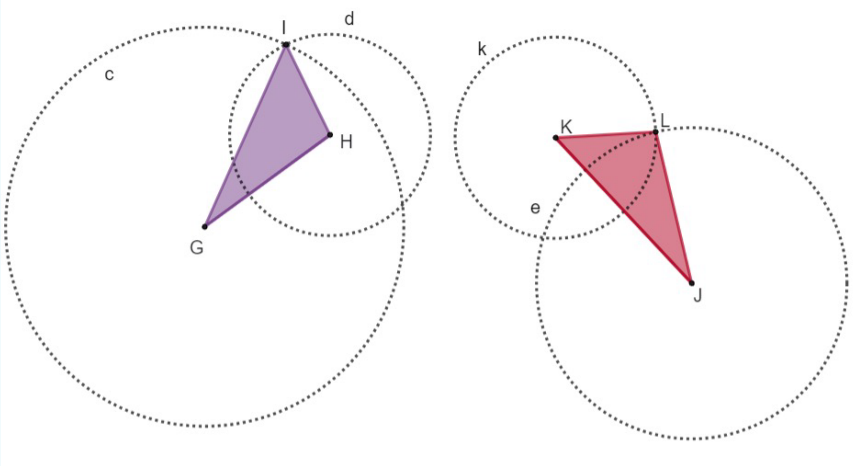
d | Volvé a reunirte con compañeros, compartan las respuestas anteriores y a partir de ellas completen la siguiente tabla:

Dada una colección de datos para construir un triángulo, pueden aparecer las siguientes situaciones:		
Datos a partir de los cuales no se pueden construir ningún triángulo	**Datos a partir de los cuales se puede construir un único triángulo**	**Datos a partir de los cuales la construcción del triángulo no es única**

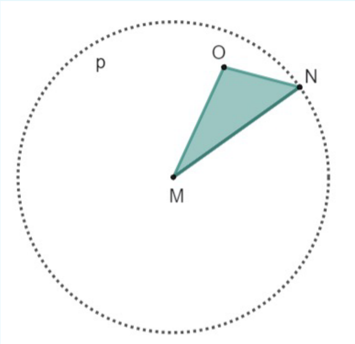
Del diálogo a las ideas
Discusión en acción

Afianzando Ideas: Reflexiones con un toque extra

e | Dos equipos, al jugar al juego “dígalo con triángulos”, hicieron las construcciones que se muestran a continuación. Analizá los triángulos GHI y JKL, y explicá si pudieron ambos equipos sumar puntos o no.

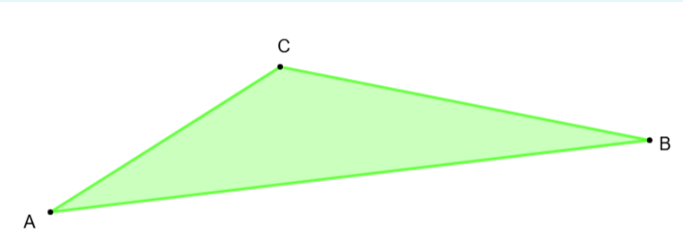


- El siguiente es otro triángulo que se construyó al jugar, y si se comparan los ángulos interiores con los de los triángulos anteriores, estos miden lo mismo. ¿Puede ser ésta una construcción alternativa a las anteriores? Es decir, si un equipo también hiciese esta construcción, ¿todos sumarían puntos? ¿Por qué?

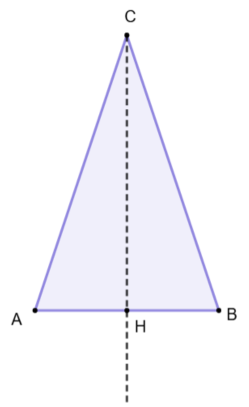
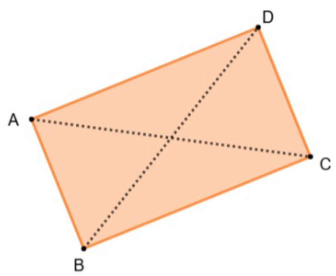
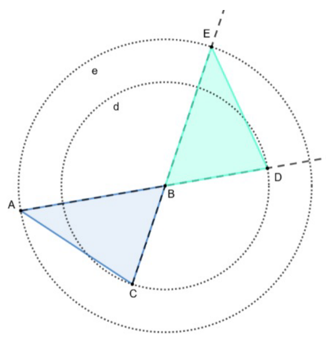


f | En base a lo analizado, ¿importa la posición del triángulo al momento de decidir si son congruentes? ¿Es indistinto realizar una construcción partiendo de uno u otro dato de los dados al tomar la tarjeta en el juego?

g | Empleá el criterio de congruencia ALA o bien LAL, para construir un triángulo congruente a ABC. Citá los pasos de construcción que hiciste.

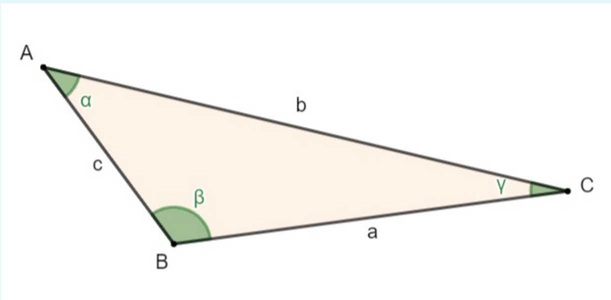


h | Analizá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, explicando con argumentos la decisión tomada.

Proposición		Explicación
El triángulo ABC es un triángulo isósceles, y la semirrecta CH es la bisectriz del ángulo <ACB. Entonces los triángulos ACH y BCH son congruentes.		
Si ABCD es un rectángulo, los triángulos ABC y DBC son congruentes.		
En la imagen, los puntos C, B y E están alineados, y los puntos A, B y D también lo están. Entonces, los triángulos ABC y EDB son congruentes.		

ACTIVIDAD
Sugerencias para el docente

Los estudiantes inician el abordaje de esta actividad, ya habiendo trabajado con las construcciones de triángulos a partir de lados o ángulos dados, por lo que saben usar los instrumentos geométricos para tal fin, saben que no siempre la construcción es posible con estos datos: si se dan los tres segmentos-lados, deben satisfacer la desigualdad triangular, y si se dan los ángulos interiores, deben satisfacer la propiedad angular.



Triángulo ABC, cuyos lados AB, BC y CA, miden a, b y c respectivamente, y cuyos ángulos interiores <CAB. <ABC y <BCA, miden respectivamente α, β y γ.

DESIGUALDAD TRIANGULAR
"La medida de cualquiera de los lados del triángulo es menor que la suma de las medidas de los otros dos lados".

- $a < b + c$
- $b < c + a$
- $c < a + b$

PROPIEDAD ANGULAR
"La suma de las medidas de los tres ángulos interiores del triángulo es 180°".

- $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$

En esta actividad, se espera que los estudiantes desarrollen argumentos sólidos para analizar y determinar las condiciones necesarias y suficientes que garanticen la congruencia de triángulos. A través de la experimentación, la resolución de problemas y la reflexión, se busca que comprendan cómo diferentes combinaciones de datos sobre los lados y ángulos interiores, permiten o no la construcción de un triángulo único.

Cabe señalar que, la idea de que la construcción sea única, refiere a que, dados ciertos elementos y condiciones, solo existe una figura (en este caso triángulo) posible que satisface tales datos, independientemente de su posición u orientación en el plano o el espacio.

La actividad inicia con una instancia de exploración lúdica, en donde deban poner en acto no solo las habilidades de construcción geométrica, sino que también conjeturen sobre cuándo esas construcciones garantizan una única respuesta y cuándo no.

Esta formulación de conjeturas se explicita en las tareas "para después de jugar", en donde el estudiante debe comenzar a formular argumentos que validen o refuten conjeturas.

- En la tarea 1, es necesario volver sobre las construcciones basadas en los lados del triángulo y reflexionar sobre la insuficiencia de contar con solo dos medidas de lados para que la construcción sea única, mientras que el dato de un tercer lado sería suficiente. En los argumentos de la no unicidad del triángulo conociendo dos lados, se puede plantear que la "apertura" entre los dos segmentos construidos es variable, y esto hace que haya infinitos (o muchos) triángulos posibles de construir. Esta consigna apunta a la formulación de criterio LLL de congruencia de triángulos.

- Continuando lo analizado en 1, en la consigna 2 se agrega el dato del ángulo comprendido entre los lados dados. Aquí la construcción será única, puesto que, de la infinidad de triángulos citados anteriormente, ahora se reduce a un único caso, y esto se debe a que la "apertura" entre estos dos ya no es variable. Este analice conlleva a la idea del criterio LAL.

- En la tarea 3, la consigna invita a analizar la construcción de triángulos cuando se conoce un lado y dos ángulos interiores. Aquí surgen varias cuestiones asociadas a la exploración de la construcción; por un lado, queda evidente que también se conoce cuánto mide el tercer ángulo, puesto que los estudiantes ya han trabajado con la propiedad angular (la suma de las medidas de los tres ángulos interiores de cualquier triángulo, siempre es 180°); por otro lado, debe analizar si la posición de cada ángulo respecto del lado produce cambios en la construcción, para poder conjeturar que esta información dada -un lado y dos ángulos- no es suficiente para hacer una única construcción, sino que debe especificarse que son ángulos adyacentes a este lado. Este trabajo, supone una aproximación al criterio ALA.

- En la consigna 4, el dato dado es que el triángulo es equilátero. Si se piensa desde los lados, los tres lados deben ser congruentes, pero los estudiantes no conocen cuál es la medida del lado del triángulo, y cómo ésta puede variar, el triángulo construido no es único. Si se piensa desde los ángulos, los tres son congruentes (miden 60° cada uno), pero este dato no alcanza para hacer única a la construcción, puesto que puede variar el tamaño del triángulo. Esta consigna apunta a formular una condición no suficiente para hacer única la construcción del triángulo (AAA, no es un criterio de congruencia). Luego deben agregar un dato más, y este dato es la medida de un lado, volviendo a cualquiera de los dos criterios analizados: LLL, ALA. Incluso, al ser equilátero, si se conoce la medida de un lado, se conoce la medida de los tres; esto también supone poder aplicar el criterio LAL.

- En la consigna 5, el estudiante debe conjeturar sobre la unicidad o no de una construcción si se conocen solo dos datos (LL, LA, AA). Aquí surgirá la insuficiencia para la unicidad si se cuenta con solo dos datos, y la necesidad de que se cuente con tres (no es suficiente por los casos estudiados en 2 y 3)

Posteriormente, en la tarea c, el estudiante debe explicitar una conclusión sobre la estrategia ganadora, la cual lo lleva a pensar en qué datos deben darse para que la construcción sea única. En base al análisis previamente realizado, se espera que el estudiante postule alguno de los tres criterios a los que se ha aproximado: "dar las medidas de los tres lados (LLL)", "dar la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre los dos (LAL)", o bien, "dar la medida de dos ángulos y el lado adyacente a estos dos (ALA)".

Finalmente, como síntesis de la exploración realizada, se le pide que complete una tabla con los casos en donde la construcción es única, no lo es, e incluso retome cuándo no se puede hacer la construcción (según la desigualdad triangular y la propiedad angular).

En un tercer momento, al finalizar la actividad, se propone una instancia de socialización y reflexión guiada por el docente. En esta instancia de la clase, se busca invitar a los estudiantes a compartir sus respuestas, sus procedimientos y argumentaciones, dando lugar a debates y confrontación de respuestas, para luego recuperar aquellas ideas y razonamientos que permitan reflexionar sobre las condiciones necesarias y suficientes para que la construcción de un triángulo sea única, para profundizarlas y dar formalidad al conocimiento, de manera tal que éste tome forma de un saber general que pueda ser evocado cuando una nueva situación lo requiera.

Algunas preguntas que pueden formularse son:

¿Qué entienden por "construcción única"? ¿Por qué es necesario conocer la medida de un lado para que la construcción sea única? ¿Por qué no será única si lo que se conocen son solo ángulos? ¿Cómo se puede asegurar que dos construcciones realizadas refieren al mismo triángulo?

¿Cuáles son esos criterios a los que se arribó tras esta actividad para garantizar que la construcción sea única?

El docente toma nota en el pizarrón de alguna conclusión colectiva a partir de la socialización de los estudiantes y le asigna el nombre de CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS.

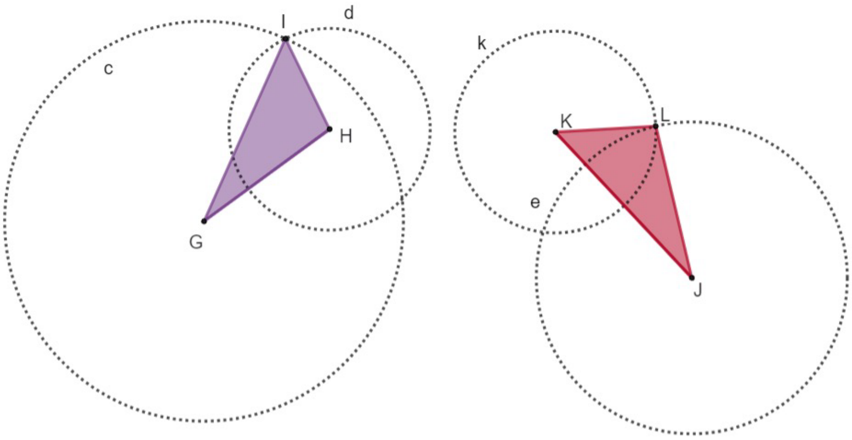
Se sugiere que quede registrado en la carpeta del alumno para que lo puedan repasar y recuperar cuando lo consideren necesario.

Finalmente, se proponen algunas tareas extra para trabajar, reforzar ideas y resignificar en aplicaciones lo aprendido. Estas tareas ponen énfasis en la argumentación, haciendo uso de los criterios de congruencia de triángulo, y para ello requieren de instancias de exploración para formular conjeturas, validarlas con base en propiedades geométricas, y luego discutirlas en la clase con sus pares.

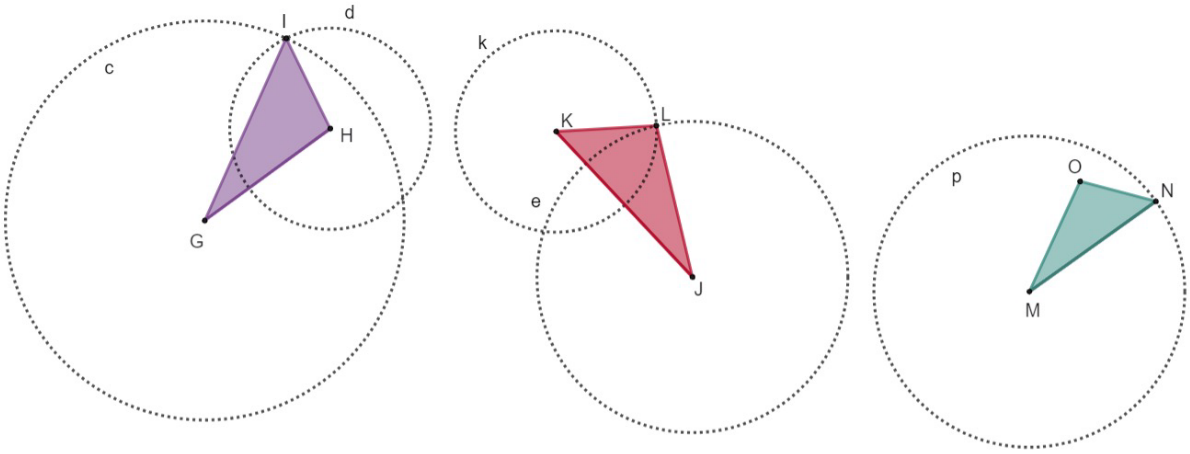
En la consigna e, se proponen reflexionar sobre una situación al jugar el juego propuesto en esta actividad, y en la que debe analizarse si se trata del mismo triángulo o no, es decir, si la construcción es única o no. Para ello, tendrá que recurrir a las estrategias de medición de lados y/o ángulos usando instrumentos geométricos, para concluir que los triángulos mostrados son congruentes, es decir que la construcción es única basándose en alguno de los tres criterios de congruencia.

- Si es necesario, el docente intervendrá en el trabajo de los estudiantes sugiriendo que midan los lados usan el compás, poniendo éstas en correspondencia con las circunferencias que aparecen en la imagen: la circunferencia c tiene centro en G y radio GI, la d tiene centro en H y radio HI, la circunferencia e se centra en J y el radio es JL, y la k se centra en el punto K y el radio es KL). Siguiendo esta idea, los estudiantes podrían trazar las circunferencias restantes, que les permitirá terminar de medir los tres lados de cada triángulo, y así comparar todas las medidas para observar la congruencia (hay congruencia entre circunferencias trazadas, y por consiguiente entre lados del triángulo), y así argumentar por el criterio LLL que los triángulos son congruentes.

  Otro camino, podría ser medir ángulos interiores del triángulo, e identificar al menos un lado congruentes, para justificar la congruencia basados en el criterio ALA (o bien LAL).



Seguidamente, se le proporciona un tercer triángulo para comparar con los anteriores, y en éste resulta que, si bien los ángulos son congruentes, la disposición de los mismos no es la misma, es decir que no se satisface ningún criterio de congruencia de triángulos. En esta consigna, se pone énfasis en que el criterio ALA (o incluso el LAL), establecen una posición estricta de los ángulos respecto de los lados de referencia.

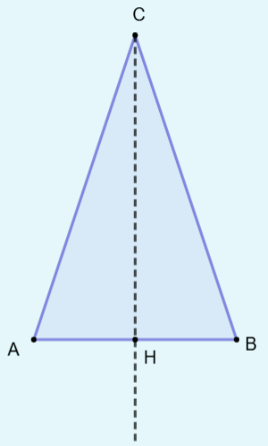


Luego, en f, se plantean dos interrogantes en donde, se debe concluir sobre la independencia de la posición o de cuál es el primer dato usado en una construcción, en relación a la unicidad o no de la misma. La forma de analizar esto nuevamente está basada en la exploración de medidas con instrumentos geométricos y en el uso de los criterios de congruencia.

En el ítem g, se pide que el estudiante use los criterios de congruencia, no para argumentar, sino para construir. Aquí, la idea de que son suficientes para garantizar la congruencia de triángulos, mientras que en las tareas anteriores fueron usados como una condición necesaria. Por otro lado, la consigna invita a repasar la construcción de segmentos y ángulos congruentes a los dados (transferencia de segmentos y ángulos), haciendo uso de los instrumentos geométricos.

Finalmente, el ítem h es una reinversión en donde el estudiante debe analizar el valor de verdad de proposiciones sobre posibles congruencias de triángulos. Para ello, tendrán que remitirse a argumentos basados en objetos geométricos conocidos (bisectriz, ángulos rectos, colinealidad, rectángulo, triángulo isósceles, triángulo rectángulo) y sus propiedades, para luego emplear el criterio que resulte conveniente para el caso y justificar el valor de verdad de cada proposición.

En caso de que algún concepto geométrico no esté lo suficientemente afianzado, o no logren los estudiantes recuperarlo, pueden hacerse breves intervenciones con preguntas para activar conocimientos previos. A continuación, se plantean algunos interrogantes que pueden servir para acompañar el trabajo argumentativo:

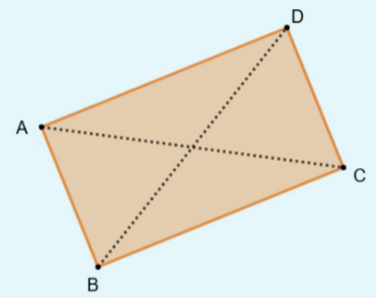


El triángulo ABC es un triángulo isósceles, y la semirrecta CH es la bisectriz del ángulo <ACB. Entonces los triángulos ACH y BCH son congruentes.

La afirmación es "Verdadera". Y algunas preguntas orientadoras pueden ser:

¿Qué significa que el triángulo sea isósceles? ¿Cuáles son los lados congruentes en ABC? Si CH es la bisectriz del ángulo <ACB, esto implica que lo divide en dos ángulos que son congruentes (<ACH y <BCH), ¿qué implicancias tiene sobre el lado AB?

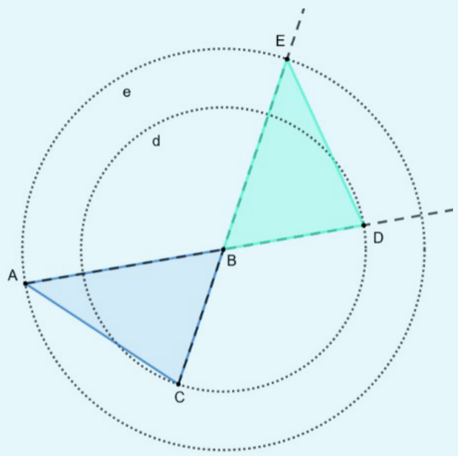
Cuando se comparan los triángulos ACH y BCH, ¿qué elementos podemos comparar? ¿Se cumple algún criterio de congruencia de triángulos?



Si ABCD es un rectángulo, los triángulos ABC y DBC son congruentes.

La afirmación es "Verdadera". Algunas preguntas orientadoras pueden ser:

¿Qué significa que ABCD sea un rectángulo? ¿Cómo son los lados y cómo son los ángulos en el rectángulo? ¿Cómo son las diagonales AC Y BD en el rectángulo? Con todo esto, ¿qué elementos de los triángulos ABC y DBC, se pueden comparar? ¿Se cumple algún criterio de congruencia de triángulos?



En la imagen, los puntos C, B y E están alineados, y los puntos A, B y D también lo están. Entonces, los triángulos ABC y EDB son congruentes.

La afirmación es verdadera. Algunas preguntas orientadoras pueden ser:

¿Qué significa tener puntos alineados o colineales? Si son colineales y los grupos de puntos tienen en común al punto B, ¿qué tipo de ángulos son los ángulos <ABC y <EBD? ¿Qué implica ésto?

Si se observan las circunferencias trazadas con el compás, ¿cómo pueden emplearse para comparar los lados AB y BE, y los lados BC y BD?

Con todo esto, ¿qué elementos de los triángulos ABC y EBD, se pueden comparar? ¿Se cumple algún criterio de congruencia de triángulos?

Se sugiere, dependiendo de las particularidades de cada clase, profundizar el trabajo argumentativo por parte de los estudiantes al analizar otros criterios de congruencia de triángulos basados en elementos como alturas o medianas. Por ejemplo, se pueden considerar los problemas 9 y 10 propuestos por Sessa (2007, pp. 44-45). O bien, probar la veracidad de la siguiente proposición: "Dos triángulos son congruentes si tienen congruentes un lado, y la altura y la mediana correspondientes a ese lado". En cualquiera de estas consignas los estudiantes podrán iniciar trabajando desde lo experimental (construyendo y analizando lo que se construye), formulando conjeturas a partir de lo que observan, y luego validar las conjeturas haciendo uso de los conocimientos sobre geometría disponibles (definición de altura, mediana, perpendicularidad y paralelismo, criterios de congruencia LLL, ALA, LAL, desigualdad triangular, etc.)

Referencias bibliográficas

- Cappelletti, G y otros. (2008). Matemática: Geometría; Aportes para la enseñanza, nivel medio. Buenos Aires; Ministerio de Educación.
- Castellano, I. (2010). Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas con alumnos de II de magisterio de la E.N.M.P.N. Tegucigalpa, Univ. Ped. Nac. Francisco Morazán.
- Iranzo, N. y Fortuny, J. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Departament de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones. Buenos Aires, Libros el Zorzal.
- Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M. y otros (2022). Clase Nro. 1: Hacer Geometría. Enseñanza y aprendizaje de la geometría. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M. y otros (2022). Clase Nro. 2: hacer geometría en el aula. Enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M. y otros (2022). Clase Nro. 3: Geometría Dinámica. Enseñar y aprender Matemática en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- Ojeda, V. y otros. (2017). Procesos de validación mediados por el software GeoGebra. Los criterios de congruencia para explorar, construir, argumentar y demostrar. Universidad Nacional de la Patagonia Austral-Unidad Académica Río Gallegos.
- Samper, C. y otros (2013). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la Geometría. Colombia; Ed. Gaia.
- Sessa C. y otros (2007). Geometría. Aportes para la enseñanza en el nivel medio. Dirección de currícula. Ministerio de Educación G.C.B.A, Capítulo 2. Accesible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/ geometria_media.pdf
- Sessa, C. y otros (2015). Hacer matemática 1/2. Ed. Estrada S.A. Buenos Aires, Argentina.