Actividades modélicas

Número y Operaciones

Geometría y Medida

3° AÑO

Autor: Sergio Damián Viñolo

MENDOZA MEJORA
APRENDIENDO MATEMÁTICA

DGE MENDOZA

Aprendizaje

1. Uso y reconocimiento de los Números Reales en distintas representaciones.

Indicadores de avance:

- Reconoce los números que no se pueden expresar como cocientes de Enteros, distinguiendo entre Números Racionales e Irracionales en distintos contextos.
- Utiliza fracciones o decimales finitos para aproximar Números Reales, mostrando cómo los Números Irracionales pueden ser representados por Números Racionales en situaciones prácticas.
- Compara y ordena Números Racionales e Irracionales en la recta numérica, aplicando correctamente el concepto de orden en el conjunto de los Números Reales.

2. Búsqueda y elección de operaciones y estrategias de cálculo en el conjunto de los Números Reales, validando desde sus propiedades la significación en las situaciones que las demanden.

Indicadores de avance:

- Utiliza y aplica correctamente la definición y propiedades de la radicación, para simplificar y resolver cálculos que involucren raíces cuadradas y de otros índices.
- Selecciona y aplica estrategias de cálculo adecuadas en el conjunto de los Números reales, utilizando operaciones y propiedades de los Números Racionales e Irracionales según la naturaleza del problema.
- Justifica la elección de operaciones y estrategias en problemas que requieren el uso de Números Irracvionales, demostrando su aplicabilidad y necesidad en el contexto dado.

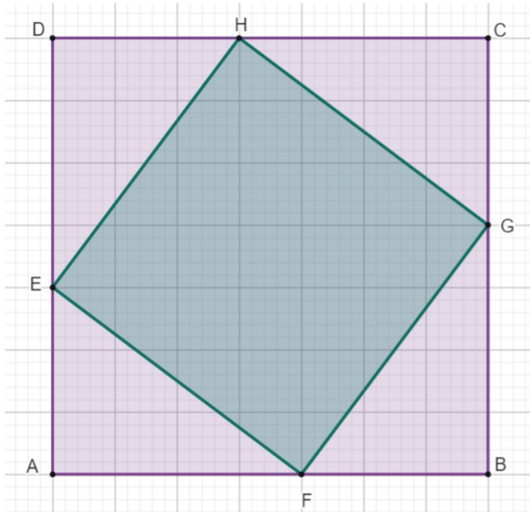
3. Uso de la relación pitagórica como herramienta para resolver problemas que involucren triángulos rectángulos, tanto en contextos geométricos como en situaciones prácticas.

Indicadores de avance:

- Comprende y formula el enunciado del Teorema de Pitágoras, reconociendo su relación con las longitudes de los lados en triángulos rectángulos.
- Aplica correctamente el Teorema de Pitágoras para resolver problemas relacionados con la medición de distancias, alturas o profundidades en contextos reales o matemáticos, justificando los pasos realizados.
- Emplea el Teorema de Pitágoras como condición necesaria para argumentar que un triángulo sea rectángulo.

ACTIVIDAD 1
Un tesoro de más de 2500 años

1 | En la imagen se observa un cuadrado ABCD, cuyos lados miden 7 cm. Además, inscrito en éste, se ha construido otro cuadrado EFGH.

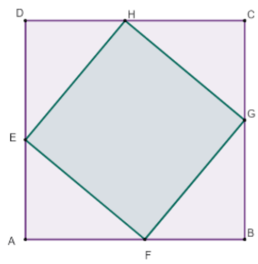


a. Sabiendo que EFGH es cuadrado, ¿cómo describirías a los triángulos AFE,BGF,CHG y DEH? Es decir, ¿qué tipo de triángulo es cada uno? ¿Cómo son entre sí estos triángulos? ¿Por qué?

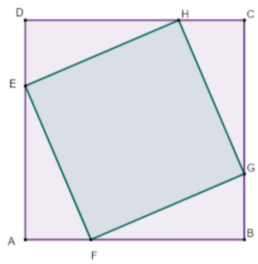
b. Suponé que el segmento AF mide 4cm, ¿cuál es el área del triángulo AFE? ¿Y el de los otros triángulos?

c. ¿Cuál es el área del cuadrado EFGH? Explicá cómo diste con este resultado.

d. ¿Cuál es la medida del lado EF del cuadrado EFGH? ¿Por qué?



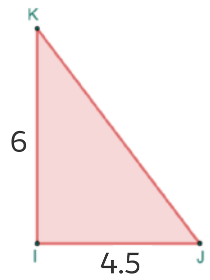
e. Si cada lado del cuadrado ABCD midiese 41 cm y el segmento AF midiese 21 cm, ¿cuál sería el área del cuadrado EFGH? ¿Cuál sería la medida del lado EF?

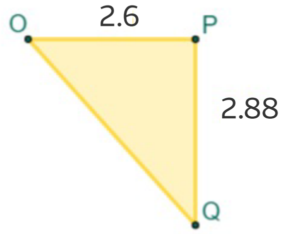


f. En otro cuadrado ABCD cuyos lados miden 8,5 cm, ¿cuál sería el área del cuadrado EFGH y la medida del lado EF, si el segmento AF midiese 2,5 cm?

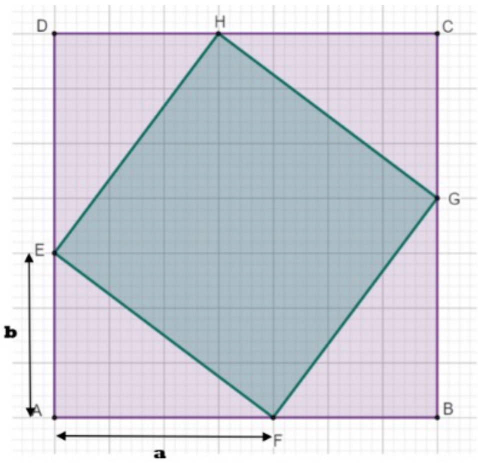
g. Explicá en palabras, cómo resolviste los interrogantes e y f.

2 | En las imágenes se muestran triángulos rectángulos en los que se conoce la medida, en cm, de los catetos (lados adyacentes al ángulo recto) y se desconoce la medida de la hipotenusa (lado opuesto al ángulo recto). ¿Cuál es la medida de este lado en cada caso?





3 | Si los catetos del triángulo AFE miden a y b, completá el siguiente razonamiento algebraicos, dejando escrito en tu carpeta aquellas cuentas que necesitaste hacer:



El área del triángulo AFE se puede expresar como ...., y entonces el área conjunta de los cuatro triángulos, que son congruentes, se puede expresar como .... o bien de forma reducida como ....

El cuadrado ABCD, es tal que sus lados miden .... y su área se puede expresar como .... o bien, si desarrollamos tal expresión, ...

El cálculo que permite dar con el área del cuadrado EFGH, atendiendo a las áreas de ABCD y los triángulos rectángulos, es ...., pero dicha expresión se puede reducir quedando ....

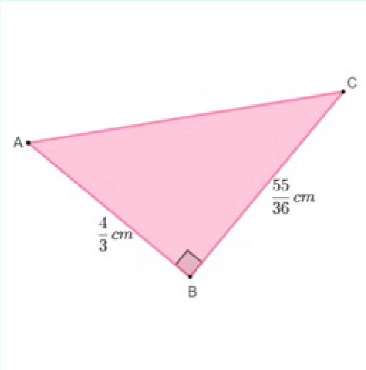
Entonces, la medida del lado del cuadrado EFGH se puede expresar como ....

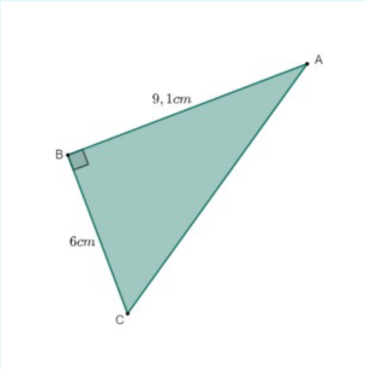
Por lo tanto, la medida de la hipotenusa del triángulo AFE cuyos catetos miden a y b, puede expresarse como ....

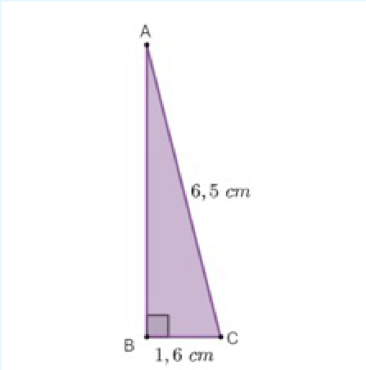
Del diálogo a las ideas
Discusión en acción

Afianzando Ideas: Reflexiones con un toque extra

4 | Hallá las medidas de los lados del triángulo rectángulo que se muestran en cada caso:

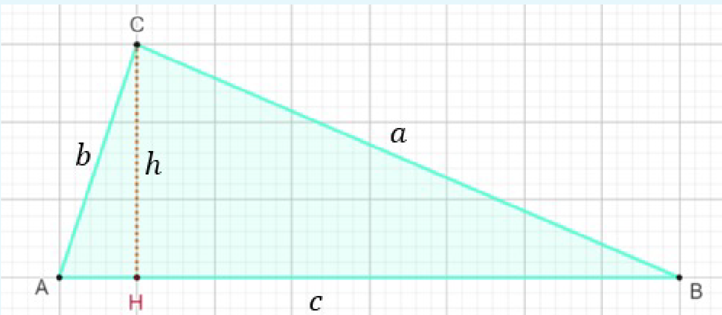






- Si las medidas de los lados de un triángulo fuesen 6cm, 10cm y 8cm, ¿se tratará de un triángulo rectángulo? ¿Y si las medidas fuesen 12cm, 10cm y 15cm? ¿Cómo podrías explicar a un compañero la estrategia que te permite asegurar que el triángulo es o no rectángulo, conociendo las medidas de sus tres lados?

5 | Considerá el triángulo rectángulo ABC en donde los catetos miden a y b, y la hipotenusa mide c. Además, se traza el segmento HC que es altura del triángulo, respecto a la hipotenusa, y su medida es h.



a. ¿Qué tipo de triángulos son ACH y BCH?

b. ¿Por qué puede asegurarse que los triángulos ABC,ACH y BCH son semejantes? ¿Qué criterio de semejanza podés usar para justificar tan relación?

c. Teniendo de referencia al triángulo ABC, ¿cuál es el lado homólogo (el que se corresponde) a la hipotenusa AB en el triángulo ACH? ¿Y el homólogo al cateto AC? ¿Qué proporción podrías formular en base a esas relaciones?

d. Teniendo de referencia al triángulo ABC, ¿cuál es el lado homólogo (el que se corresponde) a la hipotenusa AB en el triángulo BCH? ¿Y el homólogo al cateto BC? ¿Qué proporción podrías formular en base a esas relaciones?

e. A continuación, se propone un desarrollo algebraico que permite demostrar al Teorema de Pitágoras, a partir de la relación de semejanza de triángulos. Considerá que la medida del segmento AH es x. Agregá los argumentos que justifican cada paso:

$\frac{c}{b}=\frac{b}{x}$ .... $c.x=b^2$	$\frac{c}{a}=\frac{a}{(c-x)}$ .... $c.(c-x)=a^2$ .... $c^2-cx=a^2$ ....
$(c.x)+(c^2-cx)=(b^2)+(a^2)$ .... $c^2=a^2+b^2$	

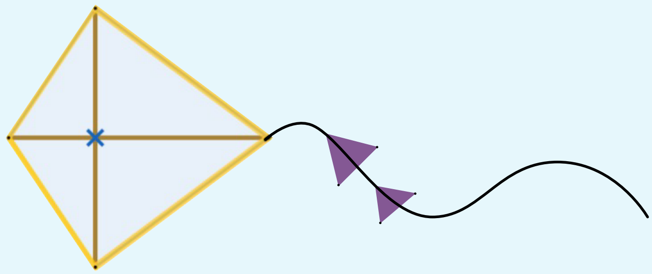
f. ¿Qué se ha demostrado con el razonamiento seguido en los ítems anteriores?

6 | En un triángulo isósceles en donde dos lados miden 55cm, y el tercero mide 88cm, ¿cuánto mide la altura respecto al lado más largo? ¿Qué propiedades geométricas tuviste en cuenta para resolver este problema?

7 | Martina quiere hacer un barrilete (cometa) y para ello va a usar dos varillas de 75 cm unidas perpendicularmente. Las varillas servirán como el esqueleto para el cuadrilátero de revestimiento de la cometa, que tendrá un borde brillante. Para unificar las varillas, Martina toma una de ellas y, a 25 cm de uno de sus extremos, hace un nudo para atar la otra varilla de manera transversal. La segunda varilla se coloca de forma que el nudo quede a la mitad de su longitud.

Una vez armado el marco, Martina planea añadir el borde brillante a todo el perímetro del cuadrilátero de revestimiento de la cometa.

¿Cuántos metros de tira brillante necesitará para cubrir todo el borde del cuadrilátero de la cometa?



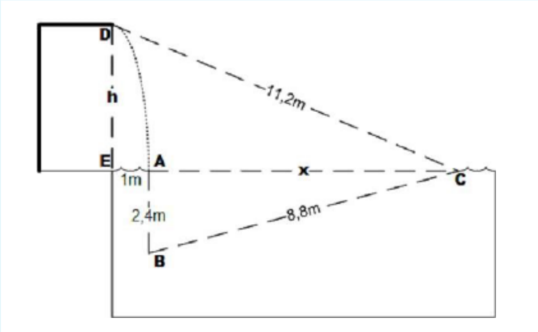
8 | David quiere comprar un televisor nuevo para su sala de estar, pero antes de elegir un modelo, necesita asegurarse de que entre perfectamente en el espacio disponible en su mueble. Este espacio donde planea colocarlo tiene un ancho de 150 cm y una altura de 100 cm.

En la tienda de electrodomésticos en donde David compra, le ofrecieron distintos tamaños de televisores, los cuales se miden en pulgadas (1″ ≈ 2,54 cm) según la longitud de su diagonal. Algunos de los tamaños más comunes en el mercado son: 32″, 40″, 43″, 50″, 55″, 58″, 65″, 70″, 75″, 85″, 98″ y 115″.

Según los tamaños del mercado y el espacio que dispone, ¿cuál es el televisor más grande que puede comprar para que entre bien en el mueble?

9 | Un clavadista profesional está entrenando en una piscina olímpica con una plataforma de saltos. Desde lo más alto de la plataforma, realiza un salto y cae en el agua a 1 metro de distancia horizontal de la base de la plataforma. Luego, se sumerge 2,4 metros bajo el nivel del agua. Para salir a la superficie, bucea hasta el final de la piscina siguiendo una trayectoria inclinada de 8,8 metros de longitud.

Además, se sabe que la distancia desde la parte superior de la plataforma hasta el punto donde el clavadista emerge del agua es de 11,2 metros. Atendiendo a la información dada, y mostrada en la imagen, determiná la altura de la plataforma medida desde el nivel del agua.



ACTIVIDAD 1
Sugerencias para el docente

La actividad 1 tiene por objetivo trabajar en relación al Uso de la relación pitagórica como herramienta para resolver problemas que involucren triángulos rectángulos, tanto en contextos geométricos como en situaciones prácticas.

Se plantea una colección de tareas a desarrollarse en 6 horas cátedras, en donde los estudiantes trabajen desde la exploración geométrica para conceptualizar la relación entre las medidas de los lados de un triángulo rectángulo, para así formalizar el Teorema de Pitágoras. El trabajo pone énfasis en el desarrollo de habilidades argumentativas, para validar conjeturas que se puedan formular en las exploraciones, como así también hacer uso de este teorema como herramienta para la resolución de problemas.

En la tarea 1.a, se espera que los estudiantes clasifiquen como triángulos rectángulos, atendiendo a los ángulos rectos que comparten con el cuadrado.

Además, al comparar los triángulos entre sí, podrán recurrir al criterio LAL (cateto-ángulo recto-cateto), para asegurar, al menos desde la percepción visual (guiados por la cuadrícula) que se trata de cuatro triángulos congruentes.

También se puede proceder a argumentar usando los otros criterios ALA o LLL, en donde si bien la medida de la hipotenusa la desconocen, saben que son todas congruentes por corresponderse con los lados del cuadrado EFGH.

En la consigna b, para hallar el área del triángulo, los estudiantes tendrán que explicitar cómo saber cuál es la medida de un cateto, si se conoce que el otro mide 4cm y el lado de cuadrado mide 7cm. Aquí, aunque pudiendo hacer uso de la cuadrícula, se espera que vayan reconociendo que la suma de las medidas de los dos catetos debe dar 7cm.

Con esta información, restará que los alumnos calculen el área haciendo uso del algoritmo correspondiente al área del triángulo rectángulo (semi producto de las medidas de los catetos), y así llegar a que cada triángulo tiene un área de $6cm^2$.

En c, para hallar el área del cuadrado EFGH, se espera que adviertan que no pueden usar el algoritmo "$área(EFGH)=m(EF)^2$" por desconocer la medida del lado, pero sí pueden hacer uso del postulado de la suma: "área(ABCD)=área(EFGH)+4.área(AEF)"

Así, el área del cuadrado EFGH, resultará de restar a $49cm^2$, cuatro veces $6cm^2$, es decir: $área(EFGH)=25cm^2$

Una vez deducido el área de EFGH, entonces el lado del cuadrado (ahora sí, pudiendo remitirse al algoritmo antes citado) es $m(EF)=\sqrt{(25cm^2)}=5cm$

En e y f, a fin de poder explicitar razonamientos que debieron surgir en los ítems anteriores, ahora sin la cuadrícula como soporte visual (incluso se podría suprimir la imagen), los estudiantes deben replicar el razonamiento anterior para llegar a la medida del lado EF a partir de las medidas de los catetos del triángulo AEF.

En todos estos casos, se procura siempre trabajar con medidas racionales de los tres lados del triángulo.

Ya en ítem g, el estudiante deberá poner en palabras la estrategia. Se esperan respuestas como: "Para hallar la medida del lado EF, se debe calcular la raíz cuadrad del área del cuadrado EFGH. A su vez, esta área resulta de restar al área de ABCD cuatro veces el área del triángulo AEF".

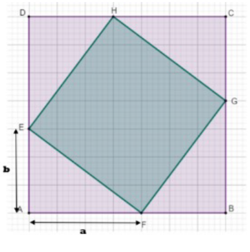
En la tarea 2, se plante analizar nuevos casos en donde se sigue abstrayendo el razonamiento, puesto que ya no se dispone de todas las figuras mostradas en la tarea anterior, sino que solo se tiene el triángulo rectángulo. Se espera que el alumno vuelva sobre aquellos que formuló en palabras como estrategia de resolución, y lo ponga en acto aquí. Por ejemplo, para el caso del triángulo IJK:

- $\text{área(triángulo)}=\frac{(6cm\ .\ 4,5cm)}{2}=13,5cm^2$

- $\text{área(cuadrado)}=(6cm+4,5cm)^2-4\ .\ 13,5cm^2=56,25cm^2$

$$m(KJ)=\sqrt{(56,25cm^2)}=7,5cm^2$$

En la tarea 3, se espera hacer un salto a la algebrización de aquel razonamiento puesto en palabras y verificado con ejemplos. La idea aquí es aproximarse, haciendo uso de lenguaje algebraico, al algoritmo del Teorema de Pitágoras.



Si los catetos del triángulo AFE miden a y b,

- El área del triángulo AFE se puede expresar como .... $\frac{a.b}{2}$ ...., y entonces el área conjunta de los cuatro triángulos, que son congruentes, se puede expresar como .... $4\ .\ \frac{a.b}{2}$ .... o bien de forma reducida como .... 2.a.b ....

- El cuadrado ABCD, es tal que sus lados miden .... a+b .... y su área se puede expresar como ....$(a+b)^2$ .... o bien, si desarrollamos tal expresión, ... $a^2+2.a.b+b^2$ ....

- El cálculo que permite dar con el área del cuadrado EFGH, atendiendo a las áreas de ABCD y los triángulos rectángulos, es .... $(a^2+2.a.b+b^2\ )-2.a.b$ ...., pero dicha expresión se puede reducir quedando .... a^2+b^2 ....
- Entonces, la medida del lado del cuadrado EFGH se puede expresar como ....$\sqrt{(a^2+b^2\ )}$ ....
- Por lo tanto, la medida de la hipotenusa del triángulo AFE cuyos catetos miden a y b, puede expresarse como .... $\sqrt{(a^2+b^2\ )}$ ....

En la puesta en común se pide que los estudiantes socialicen sus resoluciones, las comparen y discutan con las de otros, y elaboren conclusiones colectivas. Se toma nota de las estrategias coloquiales y su traducción algebraica.

Finalmente, se formaliza el Teorema de Pitágoras, como condición necesaria y suficiente de las medidas de los lados de cualquier triángulo rectángulo. Esta formalización puede acompañarse con algunos comentarios en relación a la historia detrás de este gran teorema de la geometría.

En la consigna 4, se proponen unos casos de aplicación del teorema de Pitágoras para familiarizarse con el enunciado y el algoritmo. Se destaca el último caso, en donde lo que se desconoce no es la medida de la hipotenusa, sino la de un cateto. Aquí se espera que los estudiantes puedan trabajar la ecuación que se les propone a propósito del teorema: $m(AB)^2+(1{,}6cm)^2=(6{,}5cm)^2$, e incluso formular alguna estrategia general para resolver en estos casos.

Además, surge la idea de trabajar con el teorema de Pitágoras como condición suficiente para que se trate de triángulo rectángulo. Si bien los alumnos pueden recurrir a hacer construcciones, las mismas pueden resultar insuficientes para asegurar que efectivamente se trate de un triángulo rectángulo, por lo que tendrán que analizar las medidas de sus lados, y ver si satisfacen que: "el cuadrado de la medida mayor es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos medidas".

La tarea 5 es optativa, se puede considerar o no de acuerdo al grupo clase. La misma propone una recuperación de las nociones de semejanza de triángulos, para demostrar matemáticamente el Teorema de Pitágoras. El trabajo consiste en analizar y argumentar sobre la semejanza del triángulo rectángulo ABC, con los triángulos rectángulos AHC y BHC formados al trazar la altura HC respecto a la hipotenusa AB. Luego se procede a través de preguntas guiadas, a formular la relación de proporcionalidad entre ciertas medidas de lados de los triángulos, y mediante pasos algebraicos, probar que se cumple el teorema de Pitágoras.

Las tareas 6, 7, 8 y 9, se corresponden a problemas de aplicación del Teorema de Pitágoras, en contextos variados. Una observación importante, es que en la resolución, los estudiantes harán uso de aproximaciones de ciertas medidas.

- En el problema 6, se plantea analizar su aplicabilidad en triángulos isósceles, recuperando propiedades de este tipo de triángulos asociadas a la posibilidad de dividir según una de las alturas, en dos triángulos rectángulos congruentes.

- En 7, el problema se remite a un romboide, en donde las diagonales son perpendiculares, formando así dos pares de triángulos rectángulos que son congruentes. El problema plantea las medidas de cada cateto de los triángulos.

- En el problema 8, se propone tomar decisiones a partir del cálculo de una diagonal de un rectángulo, cuya medida se calcula haciendo uso del teorema de Pitágoras.

- Finalmente, en el problema 9, el estudiante debe aplicar el teorema en dos triángulos rectángulos que se muestran en la imagen, calculando medidas de catetos en cada uno de los casos.

ACTIVIDAD 2
Decimales infinitos

1 | Lucía y Santiago discuten sobre las particularidades de los siguientes números que tienen infinitas cifras decimales, siguiendo alguna regla de formación:

1,1234543212345432123454321234543212...	2,1234123512361237123812391231012311...

a. Primero se disponen a definir la regla con la que se han generado a estos números, y agregan 10 cifras decimales a cada uno. ¿Cuáles son las cifras agregadas? ¿Cómo te diste cuenta?

b. Lucía asegura que ambos números son racionales; por su parte, Santiago explica que no es correcta la afirmación de ella, puesto que no son los dos números periódicos. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

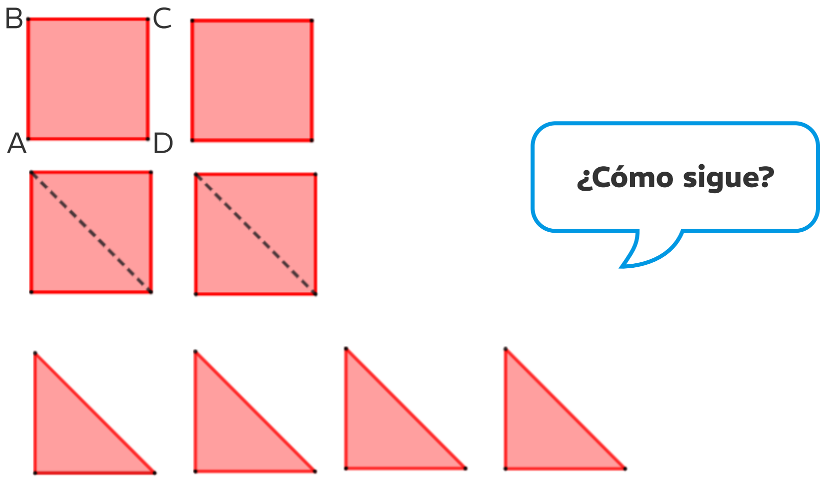
c. Proponé, otros ejemplos de números con infinitas cifras decimales, que sean periódicos y otros que no lo sean. ¿Cuáles de esos números son racionales? ¿Por qué?

Del diálogo a las ideas
Discusión en acción

2 | ¿Cómo construir un cuadrado que tenga el doble de área que uno dado? Por ejemplo, a partir de un cuadrado ABCD, ¿cómo obtener otro cuadrado que tenga el doble de su área? ¿Qué dimensiones debe tener este nuevo cuadrado?

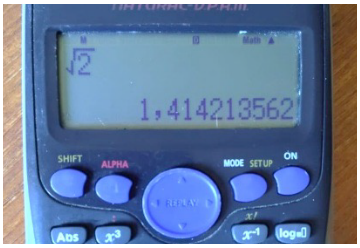
a. En la imagen se muestra una estrategia de resolución en la que se han construido y recortado dos cuadrados congruentes al ABCD. Concluí el razonamiento, a fin de construir el cuadrado buscado.

¿Cuántos metros de tira brillante necesitará para cubrir todo el borde del cuadrilátero de la cometa?



b. Suponiendo que el cuadrado ABCD tuviese un área de 1cm², ¿es cierto que el lado del cuadrado buscado mide exactamente 1,41cm? ¿Será la medida exacta 1,414cm?

c. Al intentar resolver la consigna anterior, Marcelo y Romina hicieron uso de una calculadora y una app del celular, y obtuvieron los siguientes resultados:



¿Cuál de los dos resultados es la medida exacta del lado del cuadrado buscado? ¿Por qué dieron dos resultados diferentes?

3 | Reunite con tu compañero de banco, y juntos respondan los siguientes interrogantes:

- ¿Qué significa que un número sea racional?
- Si suponen que $\sqrt{2}$ es racional, entonces se puede escribir $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ ¿Qué condición deberían agregar a esa escritura para que no se pueda reducir?
- En la igualdad anterior, ¿qué ocurre si elevan ambos miembros al cuadrado?

- ¿Es cierto que p^2 es par? ¿Por qué?
- Si p^2 es par, ¿qué se puede asegurar de p? ¿Por qué?
- ¿Por qué es cierto que a p se lo puede expresar como 2.k?
- ¿Qué obtienen si reemplazan a p por 2k en la expresión obtenida $2.q^2=p^2$? ¿Qué pueden decir afirmar de q^2? ¿Y de q?
- Pero al inicio establecieron una condición sobre p y q, ¿qué encontraron con este razonamiento?
- Si llegaron a una contradicción, ¿qué pueden concluir sobre $\sqrt{2}$?

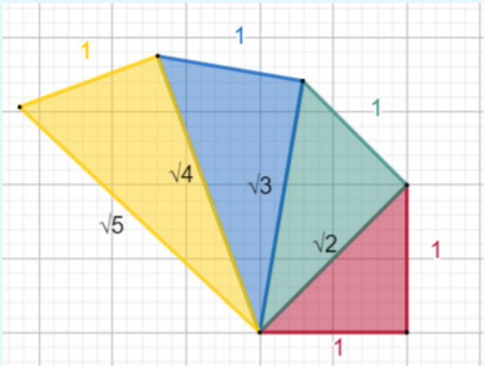
Afianzando Ideas: Reflexiones con un toque extra

4 | Proponé, de ser posible, un número racional entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. ¿Tu respuesta es única? ¿Puede ese número racional ser un número decimal exacto con solo una cifra decimal? ¿Cuántas respuestas posibles hay? ¿Podría ese número corresponder a un decimal periódico? ¿Cuántas respuestas se te ocurren?

Proponé un número irracional entre $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$. ¿Cuántos ejemplos podés proponer? ¿Y si se quisiera que ese irracional fuese un radical? ¿Y entre $\sqrt{3}$ y $\sqrt{3,1}$?

¿Cuántos irracionales se puede proponer entre dos irracionales cualesquiera? ¿Qué estrategia se te ocurre para responder?

5 | La siguiente construcción muestras las primeras iteraciones de la espiral de Teodoro:



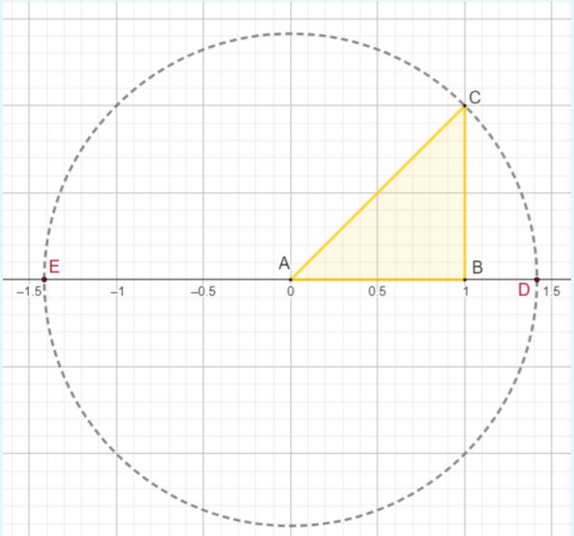
a. Continuá la construcción de al menos dos iteraciones más.

b. ¿Qué particularidad podés observar en esta construcción?

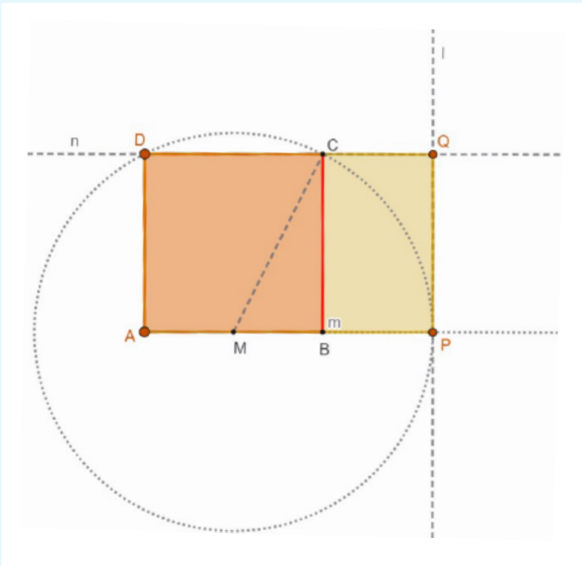
c. Si quisieras construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida $\sqrt{10}$ unidades, ¿cuáles podrían ser las medidas de los catetos? ¿Y si la hipotenusa midiese $\sqrt{12}$ unidades?

6 | En la imagen se muestran los puntos D y E ubicados sobre una recta numérica. ¿Qué números representan?

¿Cómo ubicarías a $\sqrt{3}$? ¿y a $2.\sqrt{3}$? ¿Cómo ubicarías a $-\sqrt{5}$? ¿y a la $\frac{1}{2}\sqrt{5}$?



7 | En la imagen se muestra la construcción del rectángulo APQD, denominado rectángulo áureo. La misma se ha logrado siguiendo los siguientes pasos:



- Construí un cuadrado ABCD, cuyos lados miden 1 unidad.
- Hallá el punto medio M del segmento AB.
- Trazá la circunferencia c con centro en M y radio MC.
- Prolongá el lado AB a través de la semirrecta m con origen en A y que pasa por B.
- Hallá el punto P que es intersección de la circunferencia c con la semirrecta m.
- Trazá la recta l que es perpendicular a m en el punto P.
- Trazá la recta n que es paralela a m y pasa por el punto D.
- Hallá el punto Q que es la intersección de l y n.

a. Leé los pasos de construcción, e interpretalos en la construcción realizada.

b. ¿Cuánto miden los lados AD y AP del rectángulo?

c. ¿Cuál es la razón entre la medida del lado AP y la del lado AD?

d. El número correspondiente a la razón antes calculada se denomina número de oro, ¿es racional o irracional? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 2
Sugerencias para el docente

La actividad 2, planteada para abordarse en 6 horas cátedras, se centra en la conceptualización del número irracional, su comparación con el número racional, el estudio de algunas representaciones de los irracionales, y la conceptualización del conjunto de los números reales y algunas propiedades como el orden y la densidad.

En la tarea 1, se espera que los estudiantes analicen regularidades en las cifras decimales de estos dos números. Además, un aspecto a considerar e interpretar, es qué significado se les da a los puntos suspensivos.

En a, deben agregar 10 cifras en cada caso. Para hacerlo, tendrán que advertir que se repite infinitamente 12345432 en la parte decimal del primer número, mientras que en el segundo hay un patrón que es 123 seguido de un natural que va variando comenzando desde 4 y cambiando de 1 en 1.

En b, se busca volver sobre los números racionales en su escritura decimal. Recordar que si el número tiene infinitas cifras decimales (no es exacto), para que se trate de un racional debe ser periódico (puro o mixto), siendo estos dos aquellos de los que se conoce cómo escribirlos en notación fraccionaria con numerador y denominador enteros.

En el ítem c, los estudiantes deben proponer nuevos ejemplos en base a ese recordatorio realizado en el b.

En este primer cierre, los estudiantes explican lo que recordaron de números que tienen expresión decimal periódica, y muestran que existen otros números que, también tienen infinitas cifras decimales, pero que no son periódicos, y consecuentemente, no son racionales. Así, el docente define a esos otros números como irracionales.

Seguidamente explica en el pizarrón cuestiones como:

- Los números racionales son los que se pueden expresar como fracción de números enteros;
- Los números cuya expresión decimal es infinita y periódica, son racionales.
- Los números cuya expresión decimal es infinita, pero no periódica, es irracional. Puede aquí citar ejemplos.
- El conjunto de números formado por racionales y por irracionales, se denomina conjunto de los números reales.
- Los números irracionales, no se pueden expresar como fracción de números enteros.

En la tarea 2.a, se busca en esta tarea que el estudiante recurra a estrategias empíricas para obtener un cuadrado doble, notando que éste tendrá por lado a la diagonal del cuadrado original (que se corresponde con la hipotenusa de los triángulos rectángulos que aparecen en la imagen).

En el ítem b, y luego de advertir que el lado del cuadrado doble es congruente con la diagonal del cuadro original, se puede hacer uso del Teorema de Pitágoras para poder hallar la medida buscada. El algoritmo llevará al alumno a plantear $\sqrt{(1+1)}=\sqrt{2}$, que no es ni 1,41 ni 1,414 puesto que estas medidas son aproximaciones del valor exacto, pero no son iguales.

En el ítem c, se avanza sobre el valor exacto de la $\sqrt{2}$, advirtiendo que en las imágenes sólo se muestran resultados que son buenas aproximaciones. Una forma de constatar que no son los valores exactos, podría ser usando la definición de radicación, y restando a $\sqrt{2}$ el cuadrado de los números que aparecen en las pantallas, notando que no da cero. Otra forma, es hacer el cálculo en otros dispositivos para ver que la cantidad de cifras que se visualizan varía según la capacidad de la pantalla.

Esto lleva a conjeturar que este número se puede expresar como un decimal con infinitas cifras decimales no periódicas, es decir que es irracional.

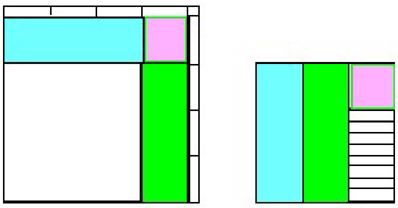
También se podría discutir, si la situación lo amerita, por qué el visor de la segunda calculadora arroja como resultado a un número positivo y a su opuesto. Esto se podría discutir desde la definición de radicación, entendiendo que al elevar al cuadrado a un número o a su opuesto, el resultado es el mismo.

Para validar la conjetura de que $\sqrt{2}$ es irracional, se propone la tarea 3 que guía al estudiante en una demostración por absurdo. La tarea es optativa según el grupo clase, pudiendo dar a que la resuelvan de manera individual, en equipos, trabajarla entre todos, explicarla directamente el docente, proponer algún video que la explique (https://youtu.be/gGWl-qg-13hk), o no trabajarla y aceptar que la conjetura es correcta.

En la institucionalización, no solo se debe quedar con la idea de que raíz de 2 es irracional, sino que el docente podría ampliar a otros ejemplos como raíces cuadradas de números primos (https://youtu.be/amSTE_gb4qk), o trabajar con la calculadora y mostrar que hay raíces de otros índices que también lo son ($\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{4}$, etc.…)

Es una buena oportunidad para avanzar en comentarios sobre la historia de los números irracionales, referirse a que ya los babilonios aproximadamente 1800 a. C. habían hallado (aunque en notación sexagesimal) una buena aproximación para la raíz de 2, y que los griegos trabajaron con otras aproximaciones geométricas.

Se puede mostrar la siguiente aproximación de $\sqrt{2}$ a través de $1 + 1/3 + 1/12$



La tarea 4, ya en el momento de Afianzando ideas, se propone analizar la densidad del conjunto de los irracionales (y también de los reales). Para estos, se debe obtener expresiones decimales aproximadas de la raíz de 2 y 3, para así buscar ejemplos dependiendo de las condiciones indicadas.

Al comparar el caso de las raíces de 3 y 3,1, se podrían también proponer ejemplos de irracionales como raíces cuadradas de números entre 3 y 3,1 (que no sean cuadrados), por ejemplo $\sqrt{3,005}$.

En la tarea 5, se propone trabajar con la espiral de Teodoro. Aquí los estudiantes deben primeramente interpretar la información mostrada en la imagen, reconociendo que, para continuar la construcción, se debe hacer un triángulo rectángulo con un cateto que coincida con la hipotenusa del último triángulo construido y el otro mida 1 unidad. Así el quinto triángulo, será uno cuyos catetos miden $\sqrt{5}$ unidades y 1 unidad.

Además, debe observarse que las medidas de las hipotenusas son raíces cuadradas de números naturales, desde el 2 en adelante. En el quinto triángulo, la hipotenusa medirá $\sqrt{6}$ unidades.

Para construir un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mida $\sqrt{10}$ unidades, una estrategia es seguir con el protocolo de la espiral de Teodoro, y postular a aquél cuyos catetos miden 1 unidad y $\sqrt{9}$ unidades. Y para el caso en que la hipotenusa mide $\sqrt{12}$ unidades, los catetos miden 1 unidad y $\sqrt{11}$ unidades.

En la tarea 6, basados en la tarea 5 en donde se trabajó con la espiral de Teodoro, el estudiante podrá deducir que la hipotenusa de ABC mide $\sqrt{2}$ unidades, y por consiguiente también será esta la medida de los radios AD y AE de la circunferencia mostrada en la imagen: así, D representa $\sqrt{2}$ en la recta numérica y E representa $-\sqrt{2}$.

Así mismo, basados en la construcción de la espiral, podrás construir los triángulos con hipotenusas que midan $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$ unidades, y con éstos trazar la circunferencia centrada en 0 y que permita encontrar a los puntos en la recta donde se ubican $\sqrt{3}$ y $\sqrt{5}$. Para hallar dobles, opuestos o mitades, solo restará recurrir al compás y regla, y hacer los trazados necesarios.

En la tarea 7, se propone nuevamente vincular el estudio de los números irracionales con la geometría. En este caso se analiza un protocolo de construcción del rectángulo áureo partiendo del lado de menor longitud.

Se espera que el estudiante interprete los pasos indicados, y pueda deducir (haciendo uso del teorema de Pitágoras) que el segmento MC, y por consecuencia el MP, mide $\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{4}}$, es decir $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades. Y entonces, como AM mide $\frac{1}{2}$ unidades, entonces la medida de AP es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ unidades.

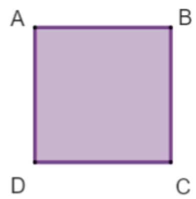
Es posible que, aquí los estudiantes no recuerden la propiedad distributiva de la radicación respecto de la división, entonces solo lleguen a decir que la medida es $\left(\sqrt{\frac{5}{4}}+\frac{1}{2}\right)$ unidades.

Luego será el docente quien pueda intervenir activando conocimientos previos como la antes citada propiedad.

En un momento de compartir estas resoluciones, las cuales también pueden hacerse mediante el uso de GeoGeabra u otra aplicación de geometría dinámica, el docente puede completar aspectos históricos que refieren a la importancia de este número irracional, y comentar sobre la existencia de otros irracionales destacados como el número Pi (π) y el número de Euler (e), pudiendo aquí comentar sobre la naturaleza algebraica y trascendente de unos y otros (o bien dejar esta clasificación para otro momento).

ACTIVIDAD 3
¿Cómo operar con radicales?

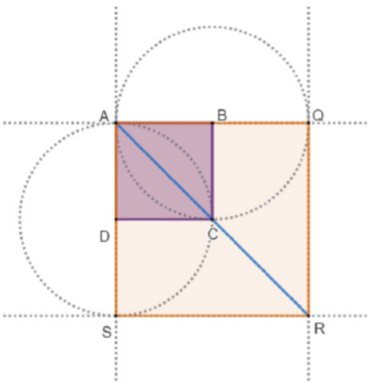
1 | Considerá un cuadrado ABCD:



a. Si el lado mide 3cm, ¿cuál es la medida de sus diagonales?

b. Si se duplicase la medida del lado del cuadrado (independientemente de cuál sea la medida original), ¿es cierto que se duplica la medida de la diagonal?

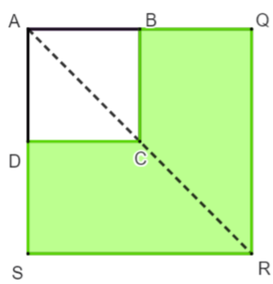
c. En la imagen se muestra una construcción de un segundo cuadrado AQRS, a partir del ABCD. Suponiendo que el lado de ABCD mide 1 cm, ¿cuál de las siguientes es la medida exacta de la diagonal del segundo cuadrado?



- ☐ $2.\sqrt{2}\ cm$
- ☐ $2{,}83\ cm$
- ☐ $2{,}828427\ cm$
- ☐ $\sqrt{8}\ cm$

En caso de que haya medidas incorrectas, explicá por qué lo son. En cuanto a los casos correctos, interpretá cómo se llegó a esos resultados.

d. La imagen muestra el resultado de una construcción similar a la del ítem anterior. Considerá que el cuadrado AQRS tiene un área de 8 cm², ¿cuál es el perímetro del hexágono sombreado DCBQRS?



2 | Para resolver con tu compañero de banco:

a. Un grupo de compañeros discute sobre la siguiente multiplicación: $\sqrt{12}.\sqrt{3}$

- Daniel afirma que ambos factores son irracionales, así es que el producto de dos irracionales es irracional.
- Julia, por su parte, afirma que esto es equivalente a $\sqrt{12.3}=6$ es decir que el resultado es racional.
- Leo escribe $\sqrt{4.3}\,.\sqrt{3}\ =2\sqrt{3}.\sqrt{3}=2.\sqrt{3^2}=2.3$

Analizá cada razonamiento y explicá si estás de acuerdo y cómo podrías argumentar cada uno.

b. ¿Cuál es el resultado de $\sqrt{12}+\sqrt{3}$? ¿Es cierto que es 5,196? ¿Será $\sqrt{15}$? ¿Puede ser igual a $3\sqrt{3}$? Explicá tu respuesta.

c. ¿Cuánto es $4\sqrt{12}-5\sqrt{3}$? ¿Cómo podrías recurrir a tus anteriores razonamientos para resolver $-2\sqrt{12}+\sqrt{75}$?

¿Podrías reducir la siguiente suma usando la misma estrategia $\sqrt{6}+\sqrt{3}$?

3 | En las tareas anteriores trabajaste con raíces que surgían de medidas y otras que surgían de operar con otros radicales.

a. Ahora, sin usar calculadora, resolvé y simplificá:

$\sqrt{18}+\sqrt{8}=$	
$\sqrt{50}-\sqrt{2}=$	
$\sqrt{12}+\sqrt{3}+\sqrt{27}=$	

b. ¿Cuáles de estas sumas se pueden reducir, y cuáles no? ¿Qué tuviste en cuenta para hacerlo?

Del diálogo a las ideas
Discusión en acción

Afianzando Ideas: Reflexiones con un toque extra

4 | Resolvé los siguientes cálculos, escribiendo el resultado de manera simplificada:

$-0,5\sqrt{80}+4\sqrt{20}$	$\left(\sqrt{75}+\sqrt{12}\right)^2$	$\left(\sqrt[3]{24}-2\sqrt[3]{81}\right).\sqrt[3]{6}$

5 | La siguiente propiedad relaciona una potenciación de exponente fraccionario con una radicación: “Si se eleva a un número real positivo **b** a un exponente racional **m/n**, se obtiene el mismo resultado que si se calcula la raíz **n**-ésima de **b** elevado a la **m**”.

a. Verificá con la calculadora esta propiedad, dejando en tu carpeta algunos ejemplos.

b. Explicá por qué si **b** es un real positivo, entonces $\sqrt{b}$ es igual a $\frac{b}{\sqrt{b}}$ (Pista: reescribí la radicación como potenciación de exponente fraccionario).

c. Teniendo en cuenta el resultado anterior, ¿cómo podrías reescribir a $\frac{5}{\sqrt{5}}$? ¿Y a $\frac{6}{\sqrt{3}}$?

6 | Si **a** y **b** son dos números racionales:

a. ¿$(a+\sqrt{b}).(a-\sqrt{b})$ es irracional? ¿Importa si $\sqrt{b}$ es irracional o racional? ¿Por qué?

b. ¿Qué ocurre si al numerador y denominador de $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ se lo multiplica por $(1-\sqrt{3})$? ¿Qué ventajas tiene la escritura fraccionaria obtenida?

c. Mostrá algún otro ejemplo similar al del ítem b.

ACTIVIDAD 3
Sugerencias para el docente

La actividad 3, se centra en el estudio de las operaciones de suma y multiplicación de radicales. Este trabajo se realiza recurriendo a estrategias geométricas basadas en el teorema de Pitágoras, pero también en algunas estrategias aritméticas sustentadas en la descomposición en factores (propiedad asociativa de la multiplicación), en la propiedad distributiva de la radicación respecto de la multiplicación, entre otras.

La actividad tiene una extensión aproximada de 6 horas cátedras.

En la tarea 1, se vuelve sobre teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal de un cuadrado.

En el punto a, se pide solo hacer el cálculo para un caso particular.

En b, analizar que, al duplicar los lados del cuadrado, también se duplica la medida de la diagonal. Los estudiantes recurrirán a algunos ejemplos a fin de verificar el cumplimiento de la afirmación, o incluso alguno podrá recordar algunas ideas sobre semejanza de triángulos.

En el ítem c, se trabaja en el marco de un nuevo problema que involucra lo planteado en b, es decir que se tiene un cuadrado con un lado duplicado (la medida de AB es 1cm y la medida de AQ es 2cm) y consecuentemente la diagonal también se ha duplicado. Para responder, los estudiantes deberán discriminar cuáles de las medidas son exactas y cuáles son aproximaciones, y entre las exactas, notar que tanto $\sqrt{8}$cm como $2\sqrt{2}$cm son medidas válidas. Los argumentos aquí serán, por un lado, una verificación con la calculadora de que ambos representan el mismo número irracional, el primero surge de aplicar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo isósceles de catetos de 2cm de lado, el segundo resultado surge de considerar la conclusión del ítem b, en donde la diagonal mide el doble de la diagonal del cuadrado ABCD.

En el problema de la consigna d, el estudiante trabajará sobre el cuadrado de 8cm^2 de área, es decir que los lados SR y RQ miden cada uno $\sqrt{8}$cm, o lo que es lo mismo $2\sqrt{2}$cm, mientras que los lados del cuadrado ABCD miden la mitad que los lados del AQRS, es decir que miden $\sqrt{2}$ cm, y consecuentemente SD, DC, CB y BQ mide cada uno $\sqrt{2}$cm.

Con toda esta información, los estudiantes procederán a plantear que el perímetro de la figura sombreada es $2\sqrt{2}\text{cm}+2\sqrt{2}\text{cm}+\sqrt{2}\text{cm}+\sqrt{2}\text{cm}+\sqrt{2}\text{cm}+\sqrt{2}\text{cm}=8\sqrt{2}\text{cm}$.

Las tareas 2 y 3 tienen como objetivo que los estudiantes comiencen a explorar, justificar y organizar ideas en torno a la multiplicación y la suma de radicales.

En la tarea 2 se parte de una discusión entre compañeros para analizar diferentes argumentos sobre el producto $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$. Esta situación permite poner en juego la propiedad distributiva de la radicación respecto de la multiplicación: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}=\sqrt{a.b}$, pero sobre todo favorece la reflexión sobre los tipos de números involucrados y su comportamiento en las operaciones. Es una buena oportunidad para trabajar con ejemplos que permitan confirmar o refutar conjeturas, analizar errores frecuentes (como pensar que el producto de dos irracionales siempre es irracional) y revisar qué significa que un número sea racional o irracional. Además, se presta para fomentar el debate matemático, ya que los tres personajes plantean pensamientos posibles, aunque no todos sean válidos.

Por su parte, la tarea 3 propone avanzar en la operación con radicales desde la perspectiva de la suma. A partir de expresiones como $\sqrt{12} + \sqrt{3}$ o $\sqrt{15}$, se invita a los estudiantes a explorar cuándo es posible sumar raíces y cómo simplificarlas, y si la suma se reduce a sumar los radicandos (12+3=15). El foco está en que reconozcan radicales semejantes y puedan expresar una raíz como el producto de otra raíz más simple, descomponiendo los radicandos en factores. Esto les permitirá interpretar por qué algunas sumas se pueden reducir y otras no, y qué significa que dos radicales sean semejantes. Esta tarea busca, además, recuperar y sistematizar las ideas trabajadas previamente, en vistas a establecer reglas de simplificación y sumar o restablecer radicales de manera fundada.

Ambas tareas están pensadas para que los estudiantes no solo operen, sino que justifiquen, comparen estrategias y elaboren generalizaciones. Esto sienta las bases para una comprensión más profunda de las operaciones con expresiones irracionales de esta naturaleza.

Se exponen las resoluciones de los estudiantes, en donde explican sus conclusiones sobre cómo sumar y cómo multiplicar radicales.

Es importante que el docente formule algunas preguntas que inviten a que los estudiantes verbalicen regularidades, expliciten propiedades y lleguen a acuerdos que luego el docente pueda sistematizar en el pizarrón. Entre las preguntas sugeridas, podrían destacarse:

- ¿Qué propiedades de la radicación aparecieron en los razonamientos que analizaron?
- ¿Qué tienen en común los casos en los que el producto de dos raíces da un número racional?
- ¿Se puede decir siempre que $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{(a \cdot b)}$? ¿Hay alguna condición para que esto sea válido?
- ¿Qué ejemplos muestran que el producto de dos irracionales puede ser racional?
- ¿Cuál podría ser una regla general sobre cómo multiplicar raíces cuadradas? ¿y si no fuesen cuadradas?
- ¿Por qué en algunos casos se puede escribir de forma reducida una suma de raíces y en otros no?

- ¿Qué quiere decir que dos radicales sean "semejantes"? ¿Por qué eso importa para sumarlos?
- ¿Qué pasos se siguieron para poder reescribir convenientemente radicales y así compararlos y reducirlos en una suma?
- ¿Cuál podría ser una “regla” o “criterio” para saber cuándo es posible reducir una suma de radicales?
- ¿Por qué, en general, $\sqrt{a}+\sqrt{b} = \sqrt{(a+b)}$? ¿Qué error se esconde detrás de este razonamiento?

En la tarea 4, se proponen algunos cálculos para que el estudiante se familiarice con las reglas definidas para sumar y multiplicar radicales, procurando expresar el resultado de manera simple y reducida.

En la tarea 5, el estudiante tendrá que verificar la propiedad que vincula a la potencia de exponente fraccionario con la radicación, y a partir de ésta demostrar que $\sqrt{b}$ es $\frac{b}{\sqrt{b}}$:

$$\sqrt{b} = b^{1/2}$$

$$b/\sqrt{b} = \frac{b^1}{b^{1/2}} = b^{1-1/2} = b^{1/2}$$

La idea de esta tarea es que los alumnos puedan reescribir convenientemente a fracciones del tipo $\frac{b}{\sqrt{b}}$ como $\sqrt{b}$, así, por ejemplo: $\frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ o incluso $\frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{2.3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$

Ya de manera optativa, dependiendo las intencionalidades del docente según el grupo de estudiantes, se puede ampliar la racionalización de denominadores con radicales, resolviendo la tarea 6.

Referencias bibliográficas

- Benito, C. y otros. (2023). Los números reales en la escuela secundaria: una secuencia posible. UNIPE: Editorial Universitaria. CABA.

- Bergé, A., Cedrón, M., Duarte, B., Herrera, R. & Lamela, C. (2019). La enseñanza de los números reales: un análisis de textos escolares. Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, FAHCE, La Plata, Argentina. Disponible en: https://www.memoria.fahce.unlp.edu.ar/trab_eventos/ev.11886/ev.11886.pdf

- Broitman, I., Itzcovich, H., & otros. (2012). Matemática en secundaria: 2 y 3.Ed. Santillana. CABA.

- Cappelletti, G., et al. (2008). Matemática: Geometría. Aportes para la enseñanza, nivel medio. Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.

- Clemens, S., et al. (1998). Geometría con aplicaciones y solución de problemas. Addison-Wesley Iberoamericana.

- Hernández Cruz, C. C. (2019). El teorema de Pitágoras, pretexto y contexto para la enseñanza de la geometría [Trabajo de grado, Universidad Nacional de Colombia]. Repositorio Institucional UNAL. https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/76854

- Jiménez, D. (2006). ¿Qué era un irracional para un matemático griego antiguo? Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.

- Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la geometría: De las construcciones a las demostraciones. Libros del Zorzal.

- Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M.; Sanguinetti, D.; Trillini, Ma. P. (2022). Clase 4: el trabajo con expresiones decimales. Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.

- Samper, C., et al. (2013). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la geometría. Ediciones Gaia.