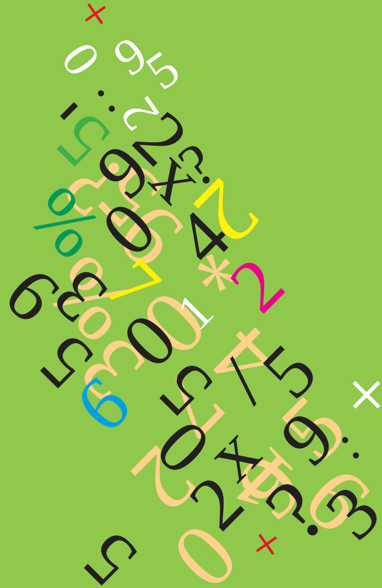
CUADERNOS DE APOYO DIDÁCTICO

El valor posicional. Reflexiones y propuestas para su enseñanza

PRIMER CICLO
PRIMARIA

Claudia Broitman
Verónica Grimaldi
Héctor Ponce



SANTILLANA

CUADERNOS DE APOYO DIDÁCTICO

El valor posicional. Reflexiones y propuestas para su enseñanza

PRIMER CICLO PRIMARIA

Claudia Broitman
Verónica Grimaldi
Héctor Ponce

SANTILLANA

Broitman, Claudia
El valor posicional. Reflexiones y propuestas para su enseñanza / Claudia Broitman ; Verónica Grimaldi ; Héctor Ponce. - 1a ed. - Buenos Aires : Santillana, 2011.
48 p. ; 19x13 cm. - (Cuadernos de apoyo didáctico)

ISBN 978-950-46-2528-5

1. Matemática. 2. Guía Docente. I. Grimaldi, Verónica II. Ponce, Héctor III. Título
CDD 371.1

Av. L. N. Alem 720 (C1001AAP), Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina.

ISBN: 978-950-46-2528-5
Queda hecho el depósito que dispone la Ley 11.723
Impreso en Argentina. Printed in Argentina.
Primera edición: xxxxxxxxxxxxxxxxxx.

Este libro se terminó de imprimir en el mes de xxxxxxxx de 2011, en xxxxxxxxxxxxxxxxxx.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El sistema de numeración ocupa un lugar central en la vida de la escuela. Constituye un objeto muy "mirado", por la fuerte presencia social que lo caracteriza, porque es el primer sistema matemático convencional con que los niños se enfrentan en la escuela y por su estrecha vinculación con otros aprendizajes matemáticos. Seguramente ello pueda explicar que su enseñanza haya sido y sea tan controvertida.

¿Es necesario enseñar las unidades, decenas y centenas? ¿Pasaron de moda los lunares y los fosforitos? ¿No es lo mismo decir "dieces" que decenas? ¿Por qué proponer las cuentas "acostadas" en lugar de las cuentas comunes? ¿Podemos usar los ábacos para enseñar los números y las cuentas? ¿Por qué se dejaron de usar los atados de fosforitos? ¿Por qué cambiar de método ahora, si los niños igualmente aprenden? ¿Es posible hacer cálculos sin saber qué es una decena? ¿Entienden los alumnos qué significa el 11 si no saben que está compuesto por una decena y una unidad? ¿Hay 4 o 34 unidades en el número 34? ¿Ya no se puede hablar de unidades, decenas y centenas? ¿Conviene hablar de "familias" de números? ¿Es preciso partir de lo concreto para enseñar los agrupamientos en base 10? Este tipo de preguntas –frecuentes entre los maestros en las diversas instancias de trabajo compartido– reflejan la controversia a la que nos referimos.

En este material presentamos algunas reflexiones que intentan ampliar la mirada acerca del aprendizaje y la enseñanza del valor posicional del sistema de numeración. Si bien el énfasis está puesto en las propuestas para el aula, previamente se presenta un breve análisis más abarcador. Por un lado, se desarrolla una perspectiva histórica sobre la construcción cultural de los sistemas de numeración. Esta mirada busca desnaturalizar el sistema de numeración que usamos hoy y favorecer la comprensión de algunas producciones infantiles. También nos permite analizar nuestro objeto –el sistema de numeración– desde una perspectiva matemática, identificando algunas propiedades del sistema, reconociendo su escondida complejidad. Recuperamos además una mirada psicológica que nos permite contemplar mejor la construcción de los conocimientos por parte de los niños y nos obliga a interpelar a la enseñanza más clásica. Luego de estos aspectos, finalmente proponemos algunas clases de problemas estudiados en investigaciones y experiencias didácticas, que se han relevado como fértiles para promover avances en las conceptualizaciones de los niños acerca del valor posicional.

Tanto el análisis crítico sobre ciertos dispositivos didácticos como las propuestas que se incluyen están atravesados por ideas particulares acerca del tipo de prácticas que queremos instalar en las clases. Como nos interesa favorecer la producción de conocimientos por parte de los niños, es preciso presentarles problemas que provoquen desafíos, en los que puedan usar sus conocimientos como punto de partida pero, a la vez, precisen reorganizarlos y aprender nuevos. A través de diferentes instancias de reflexión y análisis de los problemas, buscamos generar una progresiva transformación de los recursos matemáticos disponibles. En muchos problemas, abonamos también a que los niños puedan validar por sus propios medios los resultados obtenidos. Al otorgar a los niños la responsabilidad sobre sus estrategias de resolución, aparecen errores, procedimientos o respuestas poco convencionales que se constituyen en objeto de estudio y de debate. Desde esta perspectiva, pensamos que el avance en el conocimiento no es visible exclusivamente en términos cuantitativos (saber más) o de éxitos locales (realizar "bien" ciertos ejercicios); aprender es también ver nuevos aspectos, nuevas relaciones, nuevos usos, nuevas representaciones, es decir, saber "de otra manera".[1]

No proponemos un método diferente para enseñar lo mismo que se enseñaba cuando los niños debían llenar hojas de descomposiciones en unidades, decenas y centenas. Se estudia "otra

1. El enfoque didáctico que enmarca este trabajo es el de la Didáctica de la Matemática francesa. Entre sus principales exponentes encontramos a Brousseau, autor que nos permitió pensar en otra posible gestión de la clase de matemática. Pero las ideas expuestas en este libro también han sido elaboradas en nuestros respectivos equipos de trabajo locales, con los que hemos tenido el privilegio de investigar, producir y debatir.

cosa": cómo funciona nuestro sistema de numeración. Será necesario un camino de uso, reflexión, búsqueda de regularidades y análisis de las razones que subyacen a dichas regularidades; un estudio que promueva progresivos avances en el proceso de desentrañar la lógica de nuestro sistema. Para empezar, diremos que no se trata solo de un punto de llegada, sino de un recorrido de búsquedas y reelaboraciones. En ese tránsito esperamos que los niños puedan ir resolviendo problemas más complejos cada día y que logren establecer relaciones cada vez más profundas sobre el "comportamiento" de los números.

Durante muchos años, la matemática en la escuela estuvo cargada de temores, de prácticas memorísticas, repetitivas y mecánicas, generando rechazos contundentes, repitencia y frustraciones. (Eran tiempos en los cuales se pensaba la tarea del alumno, sus éxitos y sus fracasos como una responsabilidad individual.) Hoy, en cambio, los docentes sabemos que hay otros recorridos posibles para aprender matemática, recorridos más placenteros, más desafiantes, más significativos y, especialmente, más inclusivos.

Este pequeñísimo libro intenta acompañar a los maestros en esa dirección.

CAPÍTULO I

LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN EN LA HISTORIA. EL VALOR POSICIONAL

LOS PRIMEROS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

La necesidad de contar ha estado presente desde el origen de la Humanidad. Esta actividad se llevó a cabo de diferentes maneras, que en general consistían en corresponder cada objeto contado con alguna marca que lo diferenciara de los objetos aún no contados; por ejemplo, dedos, piedras, palitos, marcas en la arena, etc. A medida que las cantidades a contar iban siendo mayores, la correspondencia "uno a uno" fue mostrando sus límites y surgió la necesidad de inventar modos de compactar la información, creando símbolos que representaran una mayor cantidad de objetos, por ejemplo, grupos de 10. Así surgió la construcción deliberada de objetos que representaban a estas colecciones. En la Mesopotamia asiática, casi 3.000 años antes de Cristo, se reemplazó la utilización de piedras cualesquiera para contar y se construyeron piezas de barro de diferentes formas y tamaños, según la cantidad que representara cada una. A cada pieza se le otorgaba un valor convenido por todo el grupo social. Fue así como el acto de contar se convirtió en un acto de cálculo. Por ejemplo, tenían objetos que representaban el 1, el 10, el 60 y el 600, y habrían representado el número 873 seleccionando uno de 600, cuatro de 60, tres de 10 y tres de 1.

En sistemas como este, no importaba en qué orden se realizara la selección o se juntaran los objetos que representaban las distintas cantidades: con dos objetos que representaran 10 y cuatro que representaran 1 bastaba para representar la cantidad 24, independientemente del orden, primero los de mayor valor y luego los de menor valor, o de cualquier otra manera.[2]

La escritura de números surgió cuando el hombre tuvo la necesidad de llevar un registro de estos actos de contar o de eventos importantes para la cultura. Algunas representaciones gráficas fueron similares en las distintas civilizaciones o en muchas de ellas. Es el caso de la barra vertical para indicar el número 1: este símbolo elemental ya se utilizaba en la prehistoria, hace más de 30.000 años. Otras representaciones estuvieron vinculadas al uso concreto de ciertos materiales. Por ejemplo, el símbolo egipcio para el número 10 (∩) ha sido interpretado como una representación gráfica de un cordón que pudo haber servido para atar palitos y formar grupos de 10. También, algunas escrituras están relacionadas con el lenguaje hablado. En el caso del sistema jeroglífico egipcio, se cree que el origen de los sím-

2. En excavaciones arqueológicas, se han encontrado bolas de arcilla de este período rellenas de objetos con valores asignados según su forma, que ilustran esta característica: si bien esos objetos podían estar mezclados dentro del recipiente, la cantidad representada dentro de él era inequívoca.

bolos gráficos para 100 y 1.000 (𓍢 y 𓆼), respectivamente una espiral y una flor de loto, se debe a préstamos fonéticos; esto es, los sonidos de las palabras "cien" y "mil" debieron ser similares a los de las palabras "espiral" y "flor de loto".

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN HINDÚ

El sistema de numeración decimal que utilizamos actualmente tuvo su origen en la India y, más tarde, se expandió al mundo árabe y, desde allí, a Europa. Los primeros registros de la actividad numérica hindú con este sistema datan del año 460 d. C.

Originariamente disponían de un sistema en el que podían nombrar números "grandes", aunque solo representar simbólicamente hasta el 99.999. Si bien un número como 5.783.249 no podía escribirse, existía una manera de nombrarlo similar a la siguiente: "nueve, cuatro diez, dos cien, tres mil, ocho diez mil, siete cien mil, cinco millón", o sea, primero se decían las cifras de menor valor dentro del número, aclarando a qué potencia de diez correspondían. Este modo de nombrar números resultó poco práctico, por lo que los matemáticos del siglo V decidieron acortarlo, evitando explicitar las potencias de diez. Así, ese mismo número pasó a decirse "nueve, cuatro, dos, tres, ocho, siete, cinco", seguido de la frase "en el orden de la posición". En esta nueva forma de numeración oral, el valor de cada parte del número se indicaba implícitamente según la posición en la que estaba ubicado dentro del enunciado. Para el ejemplo anterior, el "ocho" que se nombraba en quinto lugar no valía 8, sino 80.000.

¿De qué manera se nombraría, por ejemplo, 2.104, en el que uno de los lugares "no tiene cantidad"? No podría decirse simplemente "cuatro, uno, dos", pues se confundiría con 214. Este problema condujo a los matemáticos a usar la palabra "sunya" –que significaba "vacío"– para indicar la ausencia de cantidad. El 2.104 se nombraba, entonces, "cuatro, vacío, uno, dos, en el orden de la posición". Algunos historiadores ven en esta práctica el nacimiento del cero hindú y de la numeración de posición.[3]

3. Los hindúes no fueron los únicos que inventaron el cero y la posicionalidad: los mayas contaban con un sistema de numeración posicional de base 20, y disponían de un símbolo especial para indicar el "vacío" en una posición.

En el siglo VI los calculistas tomaron esta práctica oral y la extendieron a la escritura, creando un sistema en el que solo era necesario utilizar las cifras del 1 al 9, conocidas desde hacía mucho tiempo, y un nuevo símbolo que representaba el “vacío” –un punto o un pequeño círculo–. Las notaciones numéricas fueron escritas con las cifras de mayor valor a la izquierda. Esta convención –propia del ábaco, instrumento con el que se resolvían los cálculos hasta ese momento– fue adoptada para el nuevo sistema de numeración y los métodos escritos de cálculo sin ábaco que desarrollaron de allí en más.

LOS ÁRABES Y LA DIFUSIÓN DE LA MATEMÁTICA HINDÚ EN EUROPA

La llegada de los números hindúes a Europa tuvo que ver en gran medida con el comercio entre europeos y árabes, y con la presencia árabe en España. Su difusión y progresiva adopción llevaron varios siglos. En aquella época, en la que el Imperio romano dominaba buena parte del hemisferio norte, el sistema de numeración romano era utilizado en muchos lugares de Europa. ¿Qué ventajas han debido encontrar aquellos hombres para considerar la posibilidad de cambiar los números con los que estaban acostumbrados a trabajar por nuevos símbolos con reglas completamente diferentes a las establecidas?

Alrededor del año 800, Al-Khowarizmi era uno de los sabios árabes más prestigiosos. En su obra “Sobre el arte de calcular hindú” exponía las características del sistema de numeración de este pueblo y sus modos de calcular. Durante el siglo XII su obra se difundió en Europa. La palabra “algoritmo”, derivada del nombre de este matemático, fue utilizada desde entonces para referirse a las estrategias hindúes para el cálculo. Aunque los números hindúes tuvieron gran difusión, su uso fue resistido durante mucho tiempo por los “abacistas”, expertos usuarios del ábaco. En algunas ciudades europeas se llegó incluso a prohibir por ley el uso de los números traídos por los árabes.

A mediados del siglo XV la invención de la imprenta propició la publicación y circulación de libros. Dado que el volumen del comercio había crecido enormemente, se escribieron muchas obras dirigidas especialmente a los mercaderes, en las que se utilizaban los números nuevos y se mostraban métodos de cálculo con las nuevas cifras. Cuando las ventajas para operar con estos métodos se hicieron evidentes, el sistema indo-arábigo comenzó a reemplazar progresivamente el uso de los otros sistemas.

ALGUNAS RAZONES PARA EL CAMBIO

Regularidad y economía fueron características cruciales para la adopción del sistema indo-arábigo en Europa. En este sistema, todos los números de un mismo orden se escriben con la misma cantidad de cifras –los dieces con dos cifras, los cienes con tres, etc.–. Por el contrario, en el sistema romano es posible escribir números del mismo orden de magnitud con diferente cantidad de símbolos; por ejemplo, veinte (XX) con dos, veintiuno (XXI) con tres, o veintidós (XXII) con cuatro. Esta irregularidad obstaculiza la posibilidad de operar con cuentas escritas. La introducción del cero y de un sistema posicional permitía la representación escrita de las mismas manipulaciones del ábaco, ya que, al llegar a 10 (o superarlo) en la columna de las unidades, también se podía "llevar uno" –un "1" en lugar de una bolita– a la columna de las decenas. El sistema que ingresaba a Europa permitía manipular de forma simbólica cualquier agrupación y operación que anteriormente se llevaba a cabo en el ábaco.

Además, gracias a sus reglas, en el sistema indo-arábigo es posible escribir cualquier número, sin importar cuán grande sea, usando repeticiones y combinaciones de cualesquiera de estos diez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Las escrituras como 2, 20, 200, 2000 involucran siempre la presencia de la misma cifra, el 2, forma que contiene la información acerca de cuántas unidades de un mismo orden se está simbolizando. Para indicar a qué orden corresponde, basta agregar los ceros –o lugares– necesarios. En cambio, en el sistema romano, para indicar estos mismos números se utilizan símbolos diferentes, repetidos dos veces en todos los casos –II, XX, CC, MM–; la información acerca de la cantidad está contenida en la repetición del mismo símbolo, que representa un valor determinado.

Resulta interesante este breve recorrido histórico sobre un objeto matemático que hoy nos es tan familiar, ya que nos permite "desnaturalizarlo", tener en cuenta que no ha sido el único a lo largo de la historia, que se han inventado sistemas con símbolos y reglas diversas, y que incluso este sistema tal cual lo conocemos hoy no era exactamente igual en sus orígenes. También nos pone al tanto de que los modos de operar con los números han variado a lo largo del tiempo, puesto que el tipo de sistema numérico utilizado condiciona las prácticas asociadas al cálculo.

Reconocer la existencia y las características de distintos sistemas de numeración en la historia de la Humanidad nos permite, además, comprender mejor algunas de las concepciones de los alumnos, que resultan inadecuadas en un sistema posicional como el nuestro pero serían completamente adecuadas en el marco de un sistema no posicional. Por ejemplo, es usual que los niños pequeños, ante el dictado de números cuya escritura no dominan completamente, elaboren producciones erróneas. Así, si se les dicta "dos mil tres", muchos escribirán 20003, en correspondencia con lo que escuchan –escuchan "dos mil" y escriben 2000; escuchan "tres" y escriben 3–. Es interesante analizar que esta escritura corresponde exactamente a la de sistemas no posicionales, como el romano (MMIII), en el cual "se ven" el 2000 y el 3.

CAPÍTULO II

CONOCIMIENTOS NUMÉRICOS DE LOS NIÑOS QUE INGRESAN A LA ESCUELA PRIMARIA

Gran cantidad de investigaciones y experiencias didácticas han permitido identificar que los niños tienen oportunidad de elaborar conocimientos acerca del sistema de numeración mucho tiempo antes de ingresar a la escuela. Así, por ejemplo, Lerner y Sadovsky (1994) relevaron algunas hipótesis que los niños construyen en el proceso de apropiación de la numeración escrita:

– Al comparar dos números de distinta cantidad de cifras, los niños establecen que “el que tiene más cifras es más grande”: este argumento puede encontrarse tempranamente y suele mostrarse estable, salvo en casos en los que los valores absolutos de las cifras de los números comparados sean muy altas en uno y muy bajas en el otro (por ejemplo 999 y 10110). Las autoras destacan que el empleo de este criterio es independiente de que los niños conozcan o no el nombre de los números en juego. Así, el número 314.568 es mayor que 2.743 “porque tiene más” o “porque es más largo”. Es decir, se trata de argumentos que no apelan a la lectura convencional de los números.

– Al comparar números con la misma cantidad de cifras, los niños pueden afirmar, por ejemplo, que 421 es mayor que 365 “porque primero está el cuatro, y el cuatro viene después del tres”, “porque empieza con cuatro, y cuatro es más grande”, etc. La utilización de este criterio de parte de los niños –aun cuando no conozcan las razones que explican este hecho– implica la atribución implícita de un valor relativo de la cifra según su posición dentro del número.

– Algunos niños pueden escribir números “redondos” o nudos (decenas, centenas exactas) antes de ser capaces de producir escrituras correspondientes a números que están en los intervalos de esos nudos. Por ejemplo, es posible que escriban convencionalmente 10, 50, 100, 1000 antes de saber cómo escribir 72.

– También elaboran hipótesis acerca de la interpretación y escritura de los números basándose en las informaciones que extraen de la numeración hablada y de sus conocimientos sobre la escritura convencional de los nudos. El intento de establecer esta correspondencia los lleva a producir notaciones no convencionales. Por ejemplo, pueden escribir 304 para "treinta y cuatro", apoyándose en su conocimiento acerca de la escritura convencional del 30.

Otras investigaciones (Alvarado, 2002; Brizuela, 2001) con niños más pequeños indagan las razones que los llevan a producir escrituras no convencionales en números de dos cifras. Por ejemplo, pueden escribir 83 cuando escuchan "treinta y ocho"; al producir esta escritura, reconocen que se trata de un número de dos cifras y que tienen que estar tanto el 3 como el 8, pero no identifican aún la relevancia del orden dentro de la escritura. O pueden escribir 24 o 54 o 94 al escuchar "treinta y cuatro"; en esta producción sustituyen las decenas, pero manteniendo una escritura de bidígitos, conservando la cifra de las unidades.

Algunos estudios (Lerner, 1992) señalan un conjunto de ideas que los niños en edad escolar conciben en relación con el cero y la posicionalidad:

– Todos los niños reconocen que el cero, como cantidad, "no vale nada". Los argumentos para explicar esta idea son variados: "no sirve", "si te ponen un cero no tenés nota", "si a 2 le quitás 2 no te queda nada".

– Si se analiza el valor del cero en escrituras de números de varias cifras, muchos niños de primer grado afirman que el cero vale si está después de un número, como en 20, pero no si se encuentra antes que él, como en 01. Además, el cero no tiene un valor dentro del número; en escrituras con ceros como 100, "vale todo el número". [4]

Estas y otras investigaciones, en nuestro país y en el exterior –Scheuer y otros, 2000, 2005; Nunes Carraher, 1989; Lerner, 2005; Terigi, 1992; Alvarado y Ferreiro, 2000; Alvarado, 2002, 2005; Brizuela, 1997, 2001; Zacañino y otros, 2009, entre tantas–, han permitido poner en evidencia la elaboración temprana, por parte

4. Esta idea es válida en otros sistemas de numeración que no son posicionales. Al tomar al número 100 como valor "completo", sin considerar el valor de la posición de cada cifra, se procede como en el sistema romano, en el que el símbolo (en este caso, C) indica el valor total del número.

de los niños, de conceptualizaciones originales acerca del sistema de numeración.

Los estudios mencionados invitan a revisar la enseñanza de este objeto de conocimiento en la escuela, orientando nuestra mirada hacia aquello que los niños saben acerca de los números para considerarlo como un importante punto de apoyo; y también promueven la interpretación de algunos de los errores que los niños producen, sugiriendo una revisión del orden en que son trabajados los temas en la escuela, en función de las dificultades para elaborar y comprender los distintos aspectos.

CAPÍTULO III

VOLVER A PENSAR LA ENSEÑANZA DEL SISTEMA DE NUMERACIÓN

SOBRE LA EXPLICITACIÓN DE LOS AGRUPAMIENTOS

Una de las ideas que históricamente ha tenido gran presencia en las aulas en relación con la enseñanza del valor posicional es la utilización de recursos que intentan materializar los agrupamientos en base 10. Por ejemplo, el uso de diferentes figuras geométricas (cuadrados, círculos, triángulos) para la representación de los valores de distinto orden (unidades, decenas o centenas) dentro de una escritura numérica. Para componer una cantidad con estos materiales es preciso repetir cada una de estas formas tantas veces como sea necesario. Como ya hemos mencionado, este modo de representación es propio de sistemas no posicionales, como el egipcio o el romano, y se diferencia del sistema de numeración posicional que empleamos. En efecto, una de las características del sistema de numeración indo-arábigo es que la composición de un número involucra sumas y multiplicaciones. Los factores que son potencias de 10 y las multiplicaciones no necesitan escribirse porque están indicados por la posición. Así, por ejemplo, 523 = 5 *x 100* + 2 *x 10* + 3 *x 1*. A su vez, las cifras 5, 2 y 3 no portan el valor de esas potencias de 10 (lo que revela que ese 5 es 500 es su ubicación), sino que indican por cuánto hay que multiplicar cada potencia. Es decir, es posible representar un conjunto de unidades con una sola cifra en cada posición. Por ejemplo, en este caso, usando el símbolo 5 estamos indicando que hay 5 grupos de 100.

En los dispositivos como el que estamos mencionando, estas tres características son vulneradas: a) no hay ninguna multiplicación en juego, b) cada pieza porta su valor independientemente de su ubicación porque representa una potencia de 10 y c) no es posible señalar la cantidad de grupos con una sola figura en cada posición. Además, y fundamentalmente, desaparece la posicionalidad –una de las particularidades distintivas del sistema de numeración indo-arábigo–, ya que el ordenamiento de las fichas no determina una diferencia en cuanto a la cantidad que representan.

Los *ataditos*[5] de fósforos de 10 o 100 han sido otro de los medios ampliamente utilizados para la enseñanza de los agrupamientos. De esta manera, se intenta que los niños puedan comprender la idea de agrupamiento a partir la experimentación con materiales concretos, agrupados de a 10. Sin embargo, este medio también presenta el inconveniente de que la posición relativa de los *ataditos* y los fósforos sueltos no es relevante en la representación de la cantidad en cuestión. En consecuencia, este método implica la enseñanza de la posicionalidad a partir de una forma de representación no posicional (Lerner, 1992). Otros recursos que pueden identificarse son los ábacos, regletas, tiras con lunares de colores, etc. El uso de todos estos elementos se apoya en el supuesto según el cual es posible identificar la estructura del sistema de numeración a través de algún tipo de materialización.

En este punto es necesario aclarar que la utilización de materiales concretos como paso previo al uso de notaciones simbólicas ha sido considerada necesaria durante mucho tiempo.

5. Durante los años '80 se llamó "ataditos" a grupos de 10 o 100 fósforos unidos con una soguita, que servían para representar materialmente las equivalencias entre órdenes.

Manipular, experimentar antes que simbolizar, pasar de lo concreto a lo gráfico y de lo gráfico a lo abstracto parecía ser el modo idóneo de introducir a los alumnos en la actividad matemática.[6] Gran cantidad de investigaciones han demostrado que la acción de manipular objetos no es un requisito para el aprendizaje de los números ni de otros contenidos matemáticos. Si bien es posible que los alumnos tengan éxito en las actividades de manipulación y composición, eso no implica necesariamente que las tareas desarrolladas les permitan acceder a las razones que sostienen el funcionamiento del sistema de numeración.

Propuestas de enseñanza como las que estamos mencionando constituyeron intentos de presentar a los niños el sistema de numeración con simplicidad. Sin embargo, a partir de las investigaciones psicológicas y didácticas, hemos aprendido que estos modos de abordar la enseñanza de un objeto complejo no necesariamente colaboran en las conceptualizaciones de los niños. Es decir, será necesario asumir que el aprendizaje del sistema de numeración es un proceso de largo plazo y que, en ese recorrido, algunas ideas iniciales serán modificadas y contenidas en otras nuevas.

SOBRE LA RELACIÓN CON EL ALGORITMO DE LA SUMA Y LA RESTA

Acorde a una idea muy extendida según la cual el conocimiento debía comunicarse en pequeñas dosis para que los alumnos lo pudieran asimilar, en primer grado de la escuela primaria los números se enseñaban de a uno, en orden y en forma acotada –hasta el 100 en el primer año, hasta el 1.000 en el siguiente, etc.–, bajo el supuesto de que se aprende acumulativamente. El maestro los presentaba de forma escrita, con dibujos o con alguna colección de elementos, mostrando la cantidad de objetos que el número representaba. Al llegar al 10, se introducían las denominaciones de unidades y decenas para comenzar

6. Estas ideas fueron adjudicadas a Piaget por la Reforma de la Matemática Moderna, interpretando "actividad" como actividad física en lugar de actividad intelectual de atribución de significados, que era a lo que el autor hacía referencia.

con el estudio de las agrupaciones propias del sistema decimal. Este conocimiento se consideraba requisito fundamental para el estudio de los números mayores que diez y para aprender a realizar cálculos. Se creía que, para poder usar los números, primero había que dominar su escritura, por lo que el valor posicional era el punto de partida.

Estos cuidados buscaban garantizar que, al momento de enfrentarse a un problema, los alumnos dispusieran de los conocimientos necesarios para resolverlo. Sin embargo, las investigaciones psicológicas y didácticas han mostrado que esta "garantía" es una ilusión:

– Aun sabiendo que *una decena tiene diez unidades* y que *los algoritmos de suma y resta se resuelven empezando por las unidades*, los niños siguen produciendo errores sistemáticos en relación con todo aquello que ya se les enseñó. Por ejemplo:

    • *le pido 1 prestado a cualquiera:* en la resta 54 - 28, para restar las unidades, le piden 1 al 8 del sustraendo y hacen 14 - 7;

    • *me llevo el más chico y escribo el más grande*: en la suma 18 + 25 (que da 13 en la columna de las unidades), ponen el 3 y se llevan 1; pero en la suma 18 + 25 + 48 (que da 21 en la columna de las unidades), ponen el 2 y se llevan 1;

    • conmutan los valores en la resta para poder resolverla: si deben resolver 20 - 6, hacen 6 - 0 en la columna de las unidades.

– Los conocimientos que los niños utilizan acerca de las agrupaciones en unidades, decenas y centenas para realizar cálculos se limitan a los nombres, símbolos y reglas, pero en muchas ocasiones no tienen ningún vínculo con el significado de las nociones involucradas. Por ejemplo:

    • en la ocasión de tener que explicar la acción de "llevarse 1", es usual que algunos alumnos respondan que se hace así "porque si no la cuenta está mal", o "porque la maestra nos explicó que el 1 va arriba" o "porque no se puede poner dos números acá", pero nada dicen acerca de que ese 1 es una decena;

- en la ocasión de tener que explicar la acción de "pedirle 1 al compañero" en cuentas como 350 - 128, algunos alumnos sostienen argumentos como "el 5 le prestó un palito al 0"; pero ante la pregunta *¿Por qué, si el 5 le presta 1 al 0, el 0 se convierte en 10 y no en 1?*, algunos niños plantean, por ejemplo, que "el 5 le presta un solo número al 0", respuesta que revela que no queda claro que lo que se "pide prestado" es 1 decena.

- es usual que sumen por un lado las unidades y por otro las decenas, sin considerar los agrupamientos; por ejemplo, para 18 + 25, realizan 8 + 5 = 13 y lo escriben en la columna de las unidades, y luego suman las decenas, obteniendo 313.

Al no comprender los mecanismos que se les enseña y al aplicarlos de manera automática, los alumnos inventan reglas arbitrarias –como también lo son, desde su punto de vista, las que se les había explicado–. En muchos casos reproducen los mecanismos que les enseña y tienen cierto éxito en la resolución de algunos problemas.[7] Sin embargo, sería conveniente que la memorización de las reglas se realizara junto con un trabajo de reflexión, estableciendo vínculos con procedimientos más cercanos a los conocimientos de los alumnos, y así evitar que trabajen sobre símbolos aislados, sin significado, donde no pueden ejercer un control sobre lo que hacen. Aparecen entonces algunos errores en sus producciones que son consecuencia del tipo de enseñanza: se generalizan reglas a casos en las que ya no son válidas, se inventan otras que reemplazan a las enseñadas, etcétera.

7. En el ejemplo ya citado, en el que un alumno inventa la regla *me llevo el más chico y escribo el más grande,* si se tratara sólo de cálculos en los que "se lleva 1", podría decirse que este alumno aprendió el procedimiento. Sin embargo, se pone de manifiesto que esto no es así cuando se le plantea un cálculo diferente: el procedimiento que lleva a cabo es equivalente a la regla que le han enseñado solo en algunos casos puntuales.

Las “remediaciones” que sugería la enseñanza para superar estos errores tenían los mismos inconvenientes que las propuestas de enseñanza: ejercitar más solo ayuda a afianzar un conocimiento si este ha sido comprendido. Cuando se trata de mecanismos desvinculados de otros conocimientos que puedan servir de apoyo y de control, la práctica repetitiva fracasa por las mismas razones que fracasó la enseñanza en primer término.

Hasta aquí hemos analizado dos ideas que han orientado la enseñanza del sistema de numeración: una de ellas, vinculada a la explicitación de los agrupamientos; la otra, en relación con los algoritmos de suma y resta. Sin embargo, las objeciones que hemos desplegado sobre algunas ideas muy extendidas en la enseñanza del sistema de numeración se condensan en una crítica más estructural y profunda. Se trata, en definitiva, de una discusión acerca de cómo se concibe el aprendizaje: desde nuestra perspectiva, aprender no es “mirar” (los agrupamientos) y descubrir a través de los sentidos, sino tener la posibilidad sostenida de interactuar con cierto objeto. Se trata, también, de una discusión acerca de cómo se concibe el sistema de numeración: como un código con el que se transcriben cantidades o como un sistema de representación en el que las relaciones no están establecidas de antemano (como en el código) sino que, justamente, deben ser desentrañadas.

CAPÍTULO IV

EL DESAFÍO DE ARTICULAR LOS CONOCIMIENTOS INFANTILES CON LAS NOCIONES QUE LA ESCUELA QUIERE ENSEÑAR

La relación entre la numeración escrita y la numeración hablada permite instalar un trabajo de reflexión en torno al valor posicional de las cifras dentro del número. Por ejemplo, muchos niños reconocen que el 3 de la escritura 35 vale 30 porque, “cuando lo leés, decís *treinta* y cinco". Progresivamente, los alumnos podrán prescindir de este apoyo en el nombre e identificar que un número es de los "cienes", los "dieces" o los "unos" según la posición que ocupe la cifra dentro de la escritura.[8] También permite analizar que algunas partes de la información brindada en la designación oral deben omitirse; por ejemplo, en la designación de trescientos cuarenta y ocho no debe escribirse 300408, pues, en la mayoría de los casos, las potencias de 10 se mencionan pero se omiten en la escritura. Y, a la inversa, revela que hay informaciones que no se mencionan en la designación oral pero deben agregarse en la escritura: es el caso de los ceros intermedios que nunca se nombran, pero deben anotarse; por ejemplo, "trescientos cinco" (Ponce y Wolman, 2010). En suma, aprender que los números no se escriben como se dicen, pero que saber cómo se leen da pistas acerca de su escritura, constituye un punto de apoyo importante para pensar acerca del valor posicional de las cifras.

Es interesante proponer a los alumnos un trabajo que les abra las puertas para empezar a elaborar algunas regularidades del sistema de numeración; por ejemplo, que *todos los "dieces" se escriben con dos cifras, todos los "cienes" se escriben con tres cifras, todos los "miles" se escriben con cuatro cifras*, etcétera.

Cuando los alumnos tienen cierto dominio de la lectura, la escritura y el orden para un rango de números, están en mejores condiciones de trabajar con composiciones y descomposiciones de tipo aditivo. La permanente interacción con el dinero hace que un problema como *¿Cuántos billetes de $10 y monedas de $1 necesito para formar $78?* sea más accesible para los niños pequeños que *¿Cuántas unidades y decenas hay en 78?*, siendo enunciados equivalentes desde el punto de vista matemático.

8. La utilización de los términos "unos", "dieces" y "cienes" es una decisión didáctica que se ha tomado hace varios años, basada en el intento de acercarles a los niños un vocabulario aditivo en lugar de multiplicativo, oral en lugar de escrito, coloquial en lugar de escolar. Creemos que estas palabras les informan mucho más a los niños sobre la composición del número que las designaciones usuales de "unidad", "decena" y "centena". Sin intención de justificar por este medio la conveniencia de su utilización, es curioso encontrar un texto de Sarmiento, del año 1882, en el cual les comunica a los maestros, en un apartado, cómo enseñar a contar usando las siguientes expresiones: "(…) Un poroto colorado vale diez. Dos porotos colorados son dos dieces que se llaman veinte. Tres porotos colorados son tres dieces o treinta. Cuatro, cuatro dieces o cuarenta (…)". En Sarmiento, D. (1882): *Método de Lectura Gradual.* Braine-le Comte (Bélgica). Reedición facsimilar, Editorial Tinta Fresca, 2004.

Como hemos adelantado, analizar los números en términos de unidades, decenas y centenas implica multiplicar y dividir (por ejemplo, interpretar que 34 equivale a 3 decenas y 4 unidades significa identificar 3 x 10 + 4; dicho de otro modo, entender cuántas decenas hay en 34 exige considerar que 34 : 10 tiene cociente 3 y resto 4). Es evidente que para los niños de primer grado no es posible comprender las operaciones que subyacen a esta descomposición, ya que no pueden vincularla con ninguno de los conocimientos disponibles.[9] En lugar de proponer un trabajo en términos multiplicativos de unidades, decenas y centenas, desde la perspectiva que adoptamos resulta enriquecedor introducir el estudio del valor posicional a partir de descomposiciones aditivas; por ejemplo, 34 como 30 + 4 o como 10 + 10 + 10 + 4.

Las descomposiciones aditivas son más sencillas para los niños y más próximas a sus propios recursos, ya que también pueden asociarse a la relación entre la numeración escrita y la numeración hablada, vínculo que elaboran tempranamente. Por ejemplo, al analizar que 34 = 30 + 4, pueden apoyarse en que el nombre "treinta y cuatro" brinda la información sobre las cantidades que se suman. Se trata de hacer evolucionar los procedimientos de los niños desde lo aditivo hacia lo multiplicativo a partir de la resolución de problemas específicos, de modo que los alumnos puedan reflexionar, por ejemplo, que el 3 de 34 "son 3 de 10", es decir, 3 x 10.

En este punto se podría objetar: *¿Cómo resolverán sumas y restas los alumnos si no conocen las unidades y las decenas y, por lo tanto, no podrán encolumnarlas en las cuentas?* Esta cuestión pierde de vista que, además de los algoritmos –es decir, las cuentas "verticales"– existen muchos procedimientos que permiten resolver sumas y restas. Por ejemplo, para 17 + 24, los alumnos podrían descomponer aditivamente 17 = 10 + 7 y 24 = 20 + 4 o 10 + 10 + 4, y luego sumar agrupando de formas diversas, como 20 + 10 = 30 y 7 + 4 = 11, entonces 30 + 11= 41. Estas estrategias

9. Utilizamos aquí el término "comprender", con la convicción de que no es lo mismo "poder usar" que "haber aprendido". Si bien muchos niños logran utilizar con cierto éxito estas descomposiciones, dicho éxito es local: la mayoría puede usar este conocimiento escolar para resolver problemas algorítmicos de descomposición, pero no logran reutilizarlo a propósito de otros problemas, por ejemplo, en aquellos que implican decidir cuántos billetes de $1 y de $10 hay en $423, o bien, como hemos analizado, producen errores de cálculo en los que aparece una pérdida de significación.

permiten que los niños no pierdan de vista las cantidades con las que operan en cada parte del cálculo. El estudio de los algoritmos puede abordarse posteriormente, cuando el control sobre esos mecanismos no esté dado, como se ha discutido anteriormente, por la memorización de sus reglas de uso sino por la comprensión de los cálculos que se realizan en cada paso, vinculados a estos otros procedimientos. Por ejemplo, al resolver 17 + 24 en una cuenta vertical, podrán recurrir a procedimientos que involucren descomposiciones aditivas para tratar de interpretar el mismo cálculo, ahora escrito de otra manera, y por lo tanto analizar sus reglas apoyándose en conocimientos disponibles. Está claro que, para que los alumnos puedan operar de este modo, resulta necesario propiciar un trabajo sobre procedimientos de cálculo mental que involucre el uso de sus conocimientos acerca del sistema de numeración.

CAPÍTULO V

PROBLEMAS PARA ESTUDIAR EL VALOR POSICIONAL

Si bien en los primeros años el estudio del valor posicional ya no se aborda en términos de unidades, decenas y centenas ni con materiales estructurados que intentan representar dichas agrupaciones, consideramos que puede ser objeto de estudio desde otra perspectiva. Una vez que los niños tengan cierto dominio de la lectura, la escritura y el orden de los números, se les puede plantear problemas como los que se describen a continuación.

ARMAR Y DESARMAR NÚMEROS EN EL CONTEXTO DEL DINERO

Las actividades relacionadas con la composición y descomposición de números resultan útiles en el análisis de las cantidades de unos, dieces, cienes y miles que los forman y en la interpretación directa de esta información para la escritura del número, en virtud del valor posicional.

Remitir al contexto del dinero supone la ventaja de relacionar el trabajo que se pretende iniciar en la escuela con prácticas sociales extraescolares de gran familiaridad para muchos alumnos. Los conocimientos de que disponen podrían ayudarlos a anticipar y controlar los procedimientos que usan y los argumentos que irán construyendo.

Los siguientes son ejemplos del tipo de problemas que se podría plantear en este contexto:

– *Si tengo 4 monedas de $1 y 4 billetes de $10, ¿cuánto dinero tengo?*

– *¿Cuál es la menor cantidad de billetes de $10 y de monedas de $1 que necesito para formar $67?*

– *Si tengo 3 monedas de $1, 3 billetes de $10 y 4 de $100, ¿cuánto dinero tengo?*

– *¿Cuál es la menor cantidad de billetes de $100, de $10 y de monedas de $1 que necesito para formar $678?*

– *Si tengo 4 monedas de $1, 6 billetes de $10 y 12 de $100, ¿cuánto dinero tengo?*

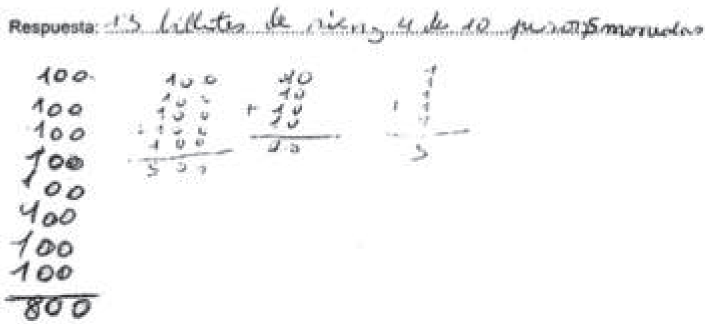
– *Cuál es la menor cantidad de billetes de $1.000, de $100, de $10 y de monedas de $1 que se precisan en un juego para formar $6.874?*

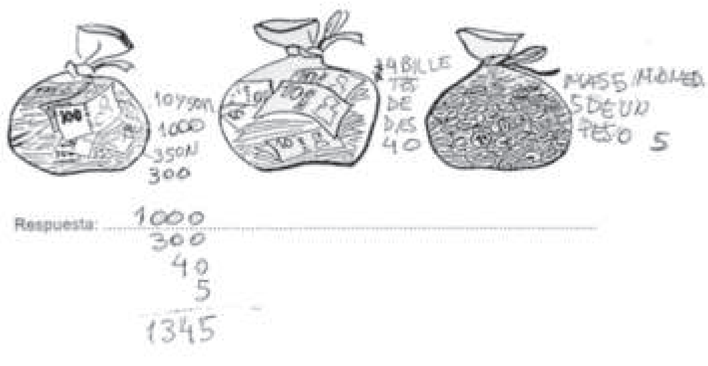
A continuación, presentamos algunas de las producciones que podrían surgir en las aulas a partir de problemas como los planteados.

Con los billetes y monedas que aparecen en el dibujo, proponé alguna forma de pagar $1.345.[10]

10. Problema extraído de la prueba para tercer grado tomada por la Dirección de Investigaciones de la Secretaría de Educación de la Ciudad de Buenos Aires, año 2003.

Este problema exige a los alumnos componer el 1.000 de 1.345 sin tener disponibles billetes de esa cantidad, lo cual propicia la aparición de agrupamientos de a 100.



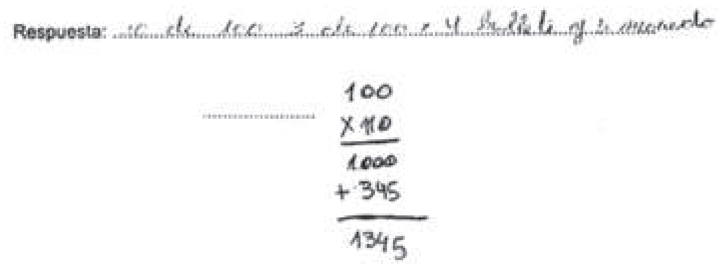


En la primera respuesta se ha representado una composición de cantidades parciales que permiten formar la cantidad en cuestión mediante distintos cálculos con cienes, dieces y unos.

La composición de 800 por un lado y 500 por otro parece indicar que el alumno dispone de conocimientos acerca de las estrategias de cálculo mental con números "redondos". Este modo de escribir los cálculos podría permitir que el alumno vuelva sobre ellos para contar la cantidad de veces que aparece el 100, el 10 y el 1, es decir, la cantidad de billetes de cada clase. La segunda respuesta podría indicar que el alumno dispone de ciertos resultados memorizados de agrupamientos de a diez: 10 (de 100) son 1.000; 3 (de 100) son 300; 4 (de 10) son 40.

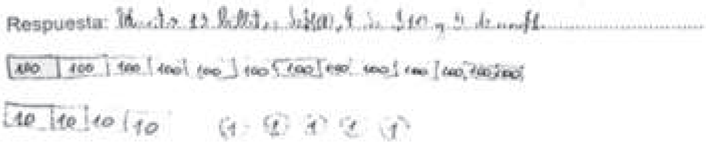
Ambas estrategias ponen de manifiesto que las partes que componen 1.345 son interpretadas según el valor que les otorga la posición dentro del número; esto es más evidente en la segunda respuesta, pues cada cifra aparece con su valor (1.000 para el 1; 300 para el 3; 40 para el 4; 5 para el 5). En algunos casos, el uso de cálculos les permite a los alumnos controlar sus respuestas a partir de la composición del número propuesto.

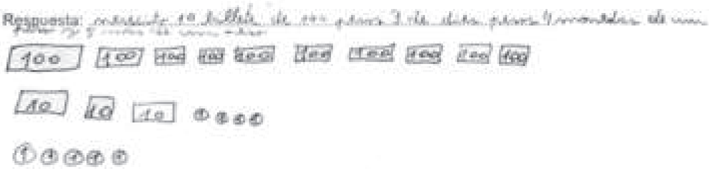
En la siguiente producción es posible interpretar que, para este alumno, la formación del 1.000 con billetes de 100 es la parte del problema menos evidente:



A partir del cálculo 100 x 10, el alumno explica cuántos billetes de 100 se necesita para formar 1.000; la composición del 345 no aparece de manera explícita, por lo que es posible que se haya interpretado la información de forma directa, desde la escritura numérica: el 5 es la cantidad de monedas de 1; el 4, de billetes de 10; el 3, de billetes de 100.

En las respuestas que se muestran a continuación los alumnos han dibujado los billetes, lo cual puede interpretarse como un recurso para contar la cantidad de billetes de cada clase y controlar, a partir del conteo de 100 en 100, 10 en 10 y 1 en 1, la composición de la cantidad en cuestión:





Si bien en este último caso el alumno considera la necesidad de agrupar 10 billetes de 100 para formar el 1.000 de 1.345, pierde el control de la composición de la cantidad que falta. Es posible que haya intentado completar su respuesta desde la lectura directa de esta información en la escritura numérica, comenzando por la cifra que ya había formado –el 1 de 1.345, con billetes de 100–, bajando en cada cifra siguiente el valor del billete o la moneda que debía involucrar, hasta necesitar la repetición de la última clase: billetes de 100 para el 1; billetes de 10 para el 3; monedas de 1 para el 4; monedas de 1 para el 5.

La siguiente producción también muestra un error:

Dado que el alumno no ha detallado el modo en que pensó su respuesta, resulta difícil determinar las razones por las cuales ha producido dicho error. Sin embargo, es posible realizar algunas hipótesis:

– puede tratarse de una simple equivocación, olvidando un cero al escribir "3 de 10$";

– puede tratarse de un error similar al de la producción anterior, en la que el alumno pierde el control de una parte de la interpretación de la escritura.

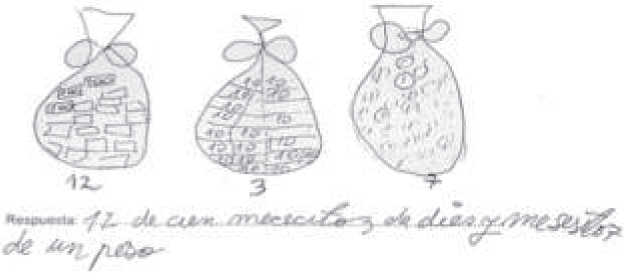
Resulta interesante señalar que este alumno es capaz de identificar la posibilidad de formar el 45 de 1.345 a partir de la acumulación de 45 monedas de $1.

En la siguiente respuesta, la información de la cantidad necesaria de billetes de cada clase ha sido interpretada aparentemente de forma directa, desde la escritura numérica de 1.345: la última cifra informa la cantidad de monedas de $1, la anteúltima, la de billetes de $10 y las otras, la de billetes de $100.

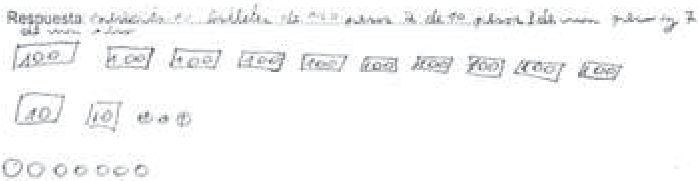
Este segundo problema agrega una condición:

¿Cuál es la forma de pagar $1.237 usando la menor cantidad de billetes y de monedas del dibujo anterior?

En general, los alumnos utilizan las mismas estrategias que han desplegado para el primer problema. En la siguiente producción, el alumno realiza un dibujo similar al de aquel problema, aunque no lo utiliza para controlar su respuesta; esto se evidencia en la cantidad de billetes y de monedas representados en cada bolsa, muchos más que los que declara necesitar:



Otra de las producciones vuelve a mostrar un error que ya ha sido analizado en el problema anterior:



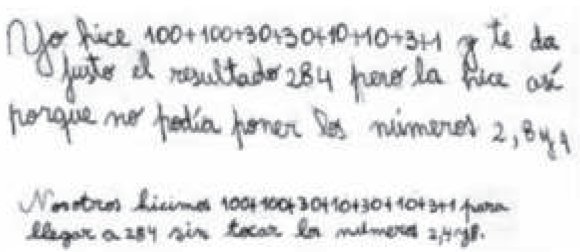
El trabajo en torno a esta clase de problemas permitirá identificar progresivamente la relación entre la escritura del número y la cantidad de billetes y de monedas necesaria para representarlo.

ARMAR Y DESARMAR NÚMEROS USANDO LA CALCULADORA

La utilización de la calculadora puede cumplir diversas funciones en la clase de Matemática. Por ejemplo, verificar y corregir un resultado obtenido por medio del cálculo mental, realizar un cálculo que resulta engorroso o investigar sobre una propiedad, entre otras funciones. En los ejemplos que siguen, su uso está asociado a la exploración de relaciones dentro del sistema de numeración.

Por ejemplo, un problema que pida *lograr que aparezca el número 654 en el visor de la calculadora usando solamente las teclas +, 1 y 0* apunta a que los alumnos eventualmente identifiquen que la cantidad de unos, dieces y cienes que deberán sumar es una información que se encuentra en la escritura del número. Por un lado, el uso de la calculadora procura “aliviar” el problema, de modo que los cálculos necesarios para resolverlo no sean un obstáculo para los alumnos. Por otro lado, funciona como un instrumento que propicia la autonomía de los niños: podrán realizar todos los ensayos que necesiten, probar diferentes maneras, conjeturar y validar. Y dado que todos estos ensayos tendrán un resultado (que puede o no coincidir con lo requerido por el problema), los errores que cometan –“me pasé por 100”, “puse un cero de más”, “puse más dieces que los que iban”– podrían ser identificados por ellos mismos, generando la necesidad de elaborar otra estrategia por sus propios medios.

A continuación se presentan producciones de alumnos de tercer grado[11] para hacer aparecer el número 284 en el visor de una calculadora mediante sumas, sin usar las teclas 2, 8 y 4:


Yo hice 100+100+30+30+10+10+3+1 y te da justo el resultado 284 pero la hice así porque no podía poner los números 2,8 y 4

Nosotros hicimos 100+100+30+10+30+10+3+1 para llegar a 284 sin tocar los números 2,4 y 8.

El trabajo de análisis colectivo sobre los procedimientos empleados, los errores cometidos y las ideas desechadas permitirá que, en sucesivas actividades más o menos similares, los niños puedan establecer relaciones entre las descomposiciones realizadas y el valor de posición.

11. Extraídas de: Dirección de Educación General Básica (2001). *Orientaciones didácticas para el trabajo con los números en los primeros años de la EGB.* La Plata. Disponible en www.abc.gov.ar.

ARMAR Y DESARMAR NÚMEROS PARA RESOLVER CÁLCULOS MENTALES

La resolución de sumas y restas sin hacer "la cuenta" involucra –en general de manera implícita– el reconocimiento y uso del valor posicional. Desde primer grado es posible proponer cálculos horizontales en los que se promuevan las descomposiciones aditivas en términos de cuántos dieces y cuántos unos hay en los números, para luego agrupar de modos diversos. También es posible proponer cálculos en los que se pueda redondear los números en juego y luego considerar la diferencia agregada.

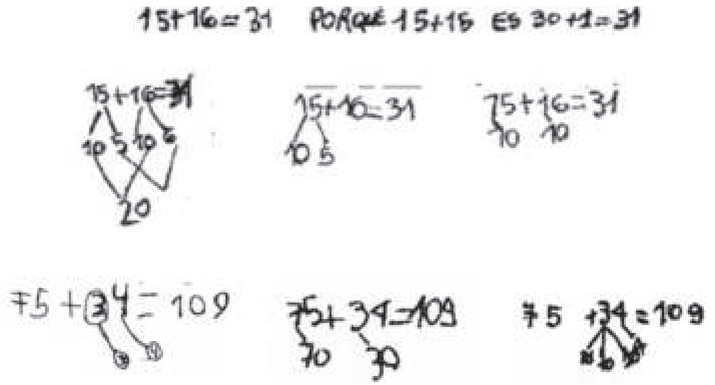
Como ya mencionamos, la relación entre la numeración escrita y la numeración oral permite instalar un trabajo de reflexión en torno al valor posicional de las cifras dentro del número. Los alumnos podrían apoyarse en el nombre de los números para producir descomposiciones; por ejemplo, en la resolución de 23 + 18, algunos niños podrían establecer que en 23 hay un 20 y hay un 3, "porque decís veintitrés", y proceder de manera similar con el 18, para luego agrupar 20 + 10 = 30 y 3 + 8 = 11, entonces 30 + 11 = 41. Progresivamente, podrán prescindir de este apoyo en el nombre e identificar cuántos cienes, dieces y unos hay según la posición que cada cifra ocupa dentro de la escritura.

Algunas situaciones que podrían plantearse en este sentido son las siguientes:

- *Si ya sabés que 10 + 10 = 20, ¿cuánto será 11 + 12?*
- *Si ya sabés que 15 + 15 = 30, ¿cuánto será 15 + 14?*
- *Si 200 + 200 = 400, ¿cuánto será 230 + 210?*
- *Resolvé mentalmente 4900 + 2900* (en la que se apunta a que utilicen, por ejemplo, el cálculo 5.000 + 3.000, y luego descuenten 200).

A continuación presentamos algunas producciones de niños de primer grado,[12] que dan cuenta del uso de descomposiciones aditivas para la resolución de cálculos:

12. Ídem nota 11.



Resulta interesante notar que las descomposiciones a las que se alude en cada caso son diferentes; por ejemplo, para 15 + 16 algunos usan el resultado memorizado 15 + 15, mientras que otros identifican el 10 y el 5 del 15, y el 10 y el 6 del 16.

Podría proponerse otro tipo de problemas que involucren cálculos de suma y resta y que puedan apoyarse en las relaciones entre la numeración oral y escrita, por ejemplo: *Escribí cuánto creés que pueden dar estos cálculos, más o menos: 32 + 26; 35 + 26; 34 + 28. Luego, resolvelos con la calculadora*. Para esta clase de situaciones, posteriormente el docente podrá proponer el siguiente análisis: *¿En qué casos el resultado es de los "cincuenti" y en cuáles dio de los "sesenti"?*[13] *¿Será o no posible que algún resultado de sumas entre "treintis" y "veintis" dé "cuarentis" o "setentis"? ¿Cómo nos podemos dar cuenta de cuándo dará "cincuenti" y cuándo "sesenti"?*, etc. Se puede proponer problemas como el anterior sumando números correspondientes a distintas decenas, con el fin de estudiar si siempre ocurre lo mismo y en qué casos hay diferencias. La calculadora estará al servicio de verificar si los resultados anticipados son o no correctos. Se trata de propiciar reflexiones del tipo *va a dar de los "cincuentis" cuando los números*

13. Problemas adaptados de Lerner, D. (2005). "¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración". En Alvarado, M. y Brizuela, B. (comp.). *Haciendo números*. México, Paidós. Reproducido en Revista 12(ntes).

"de atrás" sumen 9 o menos, que ponen en evidencia lo que ocurre en las decenas cuando se acumulan 10 o más unidades.

A continuación presentamos algunas actividades en el mismo sentido:

- *Completá el cuadro, anticipando si el resultado será de los "setenti" o de los "ochenti":*[14]

Cálculo	Creo que va a dar	Con la calculadora me dio
56 + 22		
56 + 25		
54 + 26		

- *Cuando sumamos "treinti" más "veinti", a veces el resultado es "cincuentialgo" y otras veces es "sesentialgo". ¿Por qué?*
- *Proponé dos o tres cuentas en las que el resultado comience con "sesenti" y otras tres cuyo resultado comience con "setenti".*
- *Resolvé mentalmente estos cálculos sin hacer cuentas escritas:*

  1.000 + 300 + 40 + 2=

  500 + 30 + 8=

  5 + 200 + 70 =

  10 + 4 + 200 =

- *Sin hacer cálculos, determiná si los resultados de estas sumas son mayores o menores a 4.000:*

  2.350 + 320   *3.048 + 578*

14. Ídem nota 13.

En la actividad en la que los alumnos deben establecer si la suma va a dar "de los setenti" o "de los ochenti", la reflexión colectiva apunta a la consideración simultánea de las unidades y las decenas,[15] cuestión que no suele resultar evidente en los primeros acercamientos de los niños a estos cálculos.

En la propuesta que le sigue, en la que se les pide que calculen ciertos resultados sin hacer las cuentas escritas, el análisis gira en torno a la conveniencia de acomodar los sumandos de mayor a menor, a fin de poder apoyarse en la designación oral y en que cada uno de ellos se corresponda con las posiciones de las cifras que componen ese resultado.

Para determinar si el resultado de las sumas será mayor o menor que el señalado (4.000, en este caso), los alumnos deberán tener en cuenta, nuevamente, dos órdenes de manera conjunta. Pero aquí se trata de razonar que, por ejemplo, 3 + 3 = 6, entonces 2.350 + 320 va a dar cerca de 2.600, por lo que no va a llegar a 4.000.

TRANSFORMAR NÚMEROS USANDO LA CALCULADORA

Ante enunciados como *escribí en la calculadora el número 345 y, con una sola cuenta, hacé que aparezca el número 305 en el visor,* muchos niños restan 4 con la idea de que, si el 4 no está en el segundo número, entonces hay que "sacarlo", es decir, restarlo. La calculadora les devuelve 341, y no 305, que era el resultado buscado, lo cual revela el error en su anticipación y propicia la necesidad de seguir buscando la respuesta, analizando las razones por las cuales la conjetura inicial no es correcta. Si bien gran cantidad de niños advierte la necesidad de restar (dado que lo que se busca es que el número se "achique"), es probable que necesiten varios ensayos para dar con la respuesta correcta. Algunos alumnos se apoyan en la numeración hablada

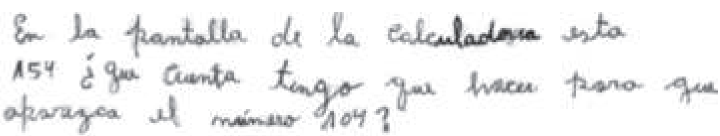
15. En este libro, hemos decidido conservar las palabras "unidades", "decenas", "centenas", etc. cuando dialogamos con los docentes lectores. Por el contrario, si se trata de explicitar lo que los chicos dicen, o cómo nos referimos a la posicionalidad cuando nos dirigimos a ellos, utilizamos los términos "unos", "dieces", "cienes", etcétera.

y reconocen que deben restar 40, ya que el número se lee "trescientos *cuarenta* y cinco". En cualquiera de estas estrategias, erróneas o correctas, por tanteo o por anticipación, el uso de la calculadora favorece la autonomía de los alumnos: es un instrumento que les permite entrar en el juego matemático, explorar otras respuestas cuando no se hayan obtenido los resultados esperados, y generalizar la regla en el caso de que hayan resuelto el problema con éxito.

Los siguientes son otros ejemplos de problemas que podrían plantearse en este sentido:

- *Anotar el 34 en la calculadora. ¿Qué hay que apretar para que el 4 se convierta en un 2, sin borrar nada?*
- *Anotar el 66 en la calculadora. Con una resta, hacer que aparezca el 56, luego el 46, después el 36 y por último el 26.*
- *Anotar el 345 en la calculadora. ¿Qué hay que apretar para que se convierta en 305, sin borrar nada?*
- *Anotar el 66 en la calculadora. Con una suma, lograr que aparezca el 666, luego el 766 y después el 866.*
- *Anotar el 7.345 en la calculadora. ¿Qué resta hay que hacer para que se convierta en 7.305? ¿Y en 7.005?*

A continuación se reproducen algunos problemas y procedimientos de alumnos de segundo grado.[16]

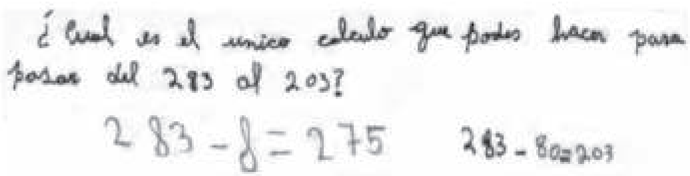

En la pantalla de la calculadora esta 154 ¿qu cuenta tengo que hacer para que aparezca el número 104?

Ante situaciones de este tipo, algunos niños restan 5. Es como si pensaran que *si el cinco tiene que desaparecer, entonces hay que*

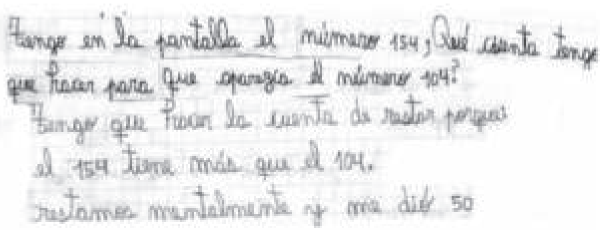
16. Extraídos de: Dirección de Educación General Básica (2001). *Orientaciones didácticas para el trabajo con los números en los primeros años de la EGB.* La Plata. Disponible en www.abc.gov.ar.

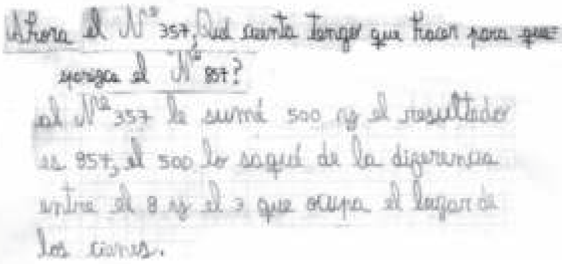
restarlo. Al no llegar al resultado esperado, continúan analizando por qué restar 5 no les permitió obtener el número buscado. Veamos cómo analizan algunos niños, a partir de dicho error, el valor de ese 5.

La mayor riqueza de esta situación reside en la fase colectiva en la que se comunican y analizan todas las estrategias y los errores. La conclusión obtenida *–hay que sacarle el 5, pero ese 5 vale 50–* será reutilizada en nuevos problemas. Sin embargo, no resultará evidente aún para todos los niños:



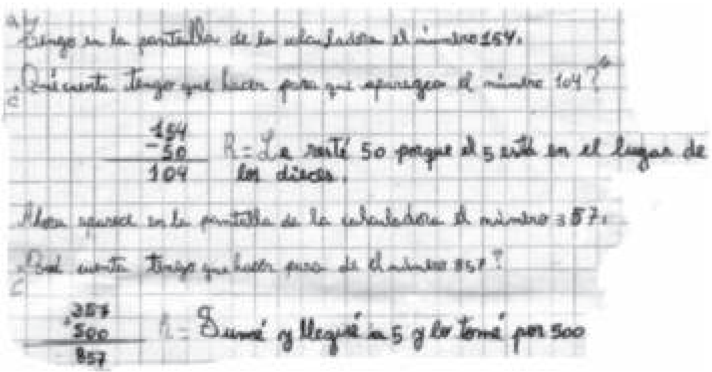
Veamos cómo algunos niños de tercer grado avanzan en sus explicaciones. En el primer problema, esta alumna realiza la resta; en el segundo, explica cómo averiguó qué número sumar y realiza un análisis del valor del 5 según la posición que ocupan el 3 y el 8.





Ahora el N° 357, Qué cuenta tengo que hacer para que aparezca el N° 857?
al N° 357 le sumé 500 y el resultado es 857, el 500 lo saqué de la diferencia entre el 8 y el 3 que ocupa el lugar de los cienes.

En cambio, esta otra alumna explica, en ambos problemas, el análisis que hizo del valor según la posición:



Tengo en la pantalla de la calculadora el número 154.
¿Qué cuenta tengo que hacer para que aparezca el número 104?

154
−50
104

R: La resté 50 porque el 5 está en el lugar de los dieces.

Ahora aparece en la pantalla de la calculadora el número 357.
¿Qué cuenta tengo que hacer para que de el número 857?

357
+500
857

R: Sumé y llegué al 5 y lo tomé por 500

ANALIZAR CÓMO SE TRANSFORMAN LAS CIFRAS DE UN NÚMERO CUANDO SE SUMA O SE RESTA 10, 20, 30… 100, 200, 300, ETCÉTERA.

Otro tipo de problemas que puede plantearse son aquellos en los que se debe sumar o restar sucesivamente 1, 10 o 100 (o 20, 30, etc.; 200, 300, etc.) para analizar "qué cambia" y "qué no cambia" en las escrituras numéricas. El objetivo de estos problemas no es la resolución de los cálculos sino el análisis de las transformaciones que se van produciendo en las escrituras, a fin de hallar una relación entre *sumo 10 y cambia la anteúltima cifra* y *sumo 1 y* *cambia la última cifra*. El uso de la calculadora podría proponerse, en un primer momento, con la finalidad ya señalada de aliviar el problema y enfocarlo en el objetivo. Una vez que hayan sido analizadas las razones por las cuales se modifican algunas de las cifras y no otras, podría utilizarse la calculadora solo a posteriori, a fin de verificar las respuestas.

Algunas actividades posibles en este sentido son las siguientes:

- *Tengo 23 figuritas y cada semana me regalan 10 figuritas. ¿Cuántas tengo después de una semana? ¿Y después de dos semanas?*
- *Marcos hoy tiene 36 figuritas y se va a comprar 10 cada semana. Completá este cuadro con las figuritas que tendrá las próximas semanas.*

Figuritas que tiene marcos hoy	*Dentro de 1 semana*	*Dentro de 2 semanas*	*Dentro de 3 semanas*	*Dentro de 4 semanas*
36				

- *Esta es una lista de precios. Completá cuáles serían los nuevos precios si aumentaran $10, $20 o $30.*

	+10	*+20*	*+30*
31			
45			
58			

- *Esta es una lista de precios. Completá cuáles serían los nuevos precios si aumentaran $1, $10 o $100.*

	+1	*+10*	*+100*
32			
85			
178			

- *Esta es una lista de precios. Completá cuáles serían los nuevos precios si aumentaran $1, $10, $100 o $1000.*

	+1	*+10*	*+100*	*+1.000*
332				
985				
1.547				

- *Completá la serie:*

483 $\xrightarrow{+100}$ .... $\xrightarrow{+100}$ .... $\xrightarrow{+100}$ ....

ANALIZAR CÓMO SE TRANSFORMAN LOS NÚMEROS CUANDO SE MULTIPLICA O SE DIVIDE POR 10, 100 O 1000

A partir de segundo o tercer grado, cuando los niños ya disponen de ciertos conocimientos sobre la multiplicación, se puede proponer problemas para estudiar cómo cambian los números cuando se los multiplica por 10, 100 o 1.000. En un principio, el trabajo podría ser exploratorio, haciendo uso de la calculadora, a fin de favorecer la producción de conjeturas en relación con el efecto de este tipo de cálculos en los números. Por ejemplo, podrían concluir que *siempre que multiplicás por diez te va a dar el número que tenías con un cero más al final*. En instancias posteriores a la exploración y a la elaboración de conjeturas, sería interesante que buscaran explicaciones para lo que sucede. Se trata de que la enseñanza invite a los alumnos a explicitar las relaciones aritméticas subyacentes a la escritura de un número y a utilizar la información contenida en la escritura decimal para desarrollar métodos de cálculo. El uso de la calculadora podría estar al servicio de quitar el foco de los cálculos para ubicarlo en las regularidades de las escrituras que se van obteniendo, a la vez que permitiría que los alumnos continuaran explorando con otros números ante preguntas como *¿Y esto pasará siempre?*

En el caso de las divisiones por 10 o 100, es probable que los niños resuelvan los cálculos inicialmente. Sería interesante que lograran establecer relaciones entre la división por la unidad seguida de ceros y la escritura de los números. Por ejemplo, se podría propiciar un trabajo en el que pudieran reconocer que el cociente de 152 : 10 será 15 y su resto 2, ya que 15 x 10 = 150 y 150 + 2 = 152; o también apelar a una explicación coloquial: *va a dar 15 y sobrarán 2 porque en 152 hay quince dieces; si mirás el número, lo que sobra es lo que está después del lugar de los dieces.*

Algunas actividades que podrían proponerse son:

– *¿Será verdad que siempre que se multiplica un número por 10 el resultado es el mismo número con un cero al final?*

– *Juan tiene 3 cajas de 100 caramelos y José tiene 30 cajas de 10 caramelos. ¿Será cierto que tienen lo mismo?*

– *Resolvé las siguientes multiplicaciones:*

3 x 10 =	*3 x 20 =*	*3 x 30 =*	*3 x 40 =*
3 x 100 =	*3 x 200 =*	*3 x 300 =*	*3 x 400 =*

– *Sabiendo que 4 x 2 = 8, resolvé las siguientes multiplicaciones:*

4 x 20 =	*4 x 200 =*	*40 x 2 =*	*400 x 2 =*

– *Mariana tiene 34 alfajores y los quiere acomodar en cajas de 10 alfajores. ¿Cuántas cajas precisa? ¿Sobrarán alfajores?*

– *Un comerciante quiere acomodar 528 lápices en cajas de 10 lápices. ¿Cuántas cajas necesita? ¿Sobrarán lápices?*

Como puede verse en todas las actividades planteadas, se intenta que los alumnos exploren ciertos procedimientos, los investiguen, los mejoren, desestimen los que no les permiten encontrar la solución y “pasen en limpio” aquello que deberán retener de manera progresiva. Se espera, también, que el trabajo vaya más allá de la determinación de ciertos resultados o modos de hacer. Se trata fundamentalmente de someter esos nuevos conocimientos a la consideración de toda la clase y de asumir la responsabilidad de argumentar, ofreciendo razones que sostengan esos conocimientos. En el caso particular del valor posicional, conocer las razones está asociado al establecimiento de relaciones en el marco de las operaciones aritméticas y al progreso en la interpretación de la información de una escritura numérica.

PROFUNDIZAR EL ESTUDIO DEL VALOR POSICIONAL

Los alumnos tendrán oportunidad de profundizar el estudio del valor posicional en el segundo ciclo. Una vez que tengan un mayor dominio de la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros, del cálculo mental, de las escrituras aritméticas y de la jerarquía de las operaciones, podrán seguir avanzando con problemas que les exijan considerar, por ejemplo, que 4.321 = 4 x 1.000 + 3 x 100 + 2 x 10 + 1, y que aquel número también es equivalente a 43 x 100 + 21 o a 432 x 10 + 1. Comprender en profundidad el valor posicional de las cifras en el sistema decimal les permitirá anticipar incluso el resto de dividir 4.321 por 10, por 100, o por 1.000. Estos conocimientos podrán vincularse también al estudio del sistema métrico, poniendo en relación las características del sistema de numeración, los cálculos por la unidad seguida de ceros, las relaciones de proporcionalidad directa y los múltiplos y submúltiplos de las unidades de medida. La complejidad de este conocimiento es, justamente, la razón por la cual el estudio del valor posicional se inicia en el primer ciclo y se profundiza en el segundo.

PALABRAS FINALES

El estudio del valor posicional que proponemos apunta a instalar un tipo de actividad matemática que –partiendo de los conocimientos de los alumnos– promueva la producción de ideas nuevas, la elaboración de conjeturas y su puesta a prueba, la comparación entre diferentes maneras de resolver, el análisis de su validez, la toma de decisiones.

Tal como hemos afirmado inicialmente, hoy sabemos que no es preciso comprender la base decimal de nuestro sistema para leer, escribir, comparar u operar con números. Sin embargo, aunque conocer el valor posicional no sea necesario como punto de partida, su estudio vale la pena, pues implica la posibilidad de comprender, cada vez con mayor profundidad, las reglas que comandan el funcionamiento de nuestro sistema de numeración.

Esperamos que el trabajo en torno a la resolución de ciertos problemas numéricos y sus reflexiones permita a los niños comprender de manera progresiva esta notable y compleja construcción de la humanidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Alvarado, M. y Ferreiro, E. (2000). “El análisis de nombres de números de dos dígitos en niños de 4 y 5 años”. En Lectura y Vida. Revista Latinoamericana de Lectura. Año 21, nº1, marzo.

- Alvarado, M. (2002). *La construcción del sistema gráfico numérico en los momentos iniciales de la adquisición del sistema gráfico alfabético.* Tesis Doctoral. Centro de Investigación y Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (México).

- Bartolomé, O. y Fregona, D. (2003). “El conteo en un problema de distribución: una génesis posible en la enseñanza de los números naturales”. En Panizza, M. (comp.). *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB: Análisis y Propuestas.* Buenos Aires, Paidós.

- Boyer, C. (1994). *Historia de la matemática.* Madrid, Alianza Universidad Textos.

- Brizuela, B. (2000). “Algunas ideas sobre el sistema de numeración escrito en niños pequeños”. En Elichiry, N. (comp.). *Aprendizaje de niños y maestros/as. Hacia la construcción del sujeto educativo.* Buenos Aires, Manantial.

- Brizuela, B. (2001). *Children’s ideas about the written number system.* Tesis Doctoral. Escuela de Educación de la Universidad de Harvard.

- Brizuela, B. (2001). “Inventions and conventions: A story about capital numbers”. En For the learning of Mathematics. Nº17, 1. Publishing Association, Vancouver.

- Broitman, C. y Kuperman, C. (2005). *Interpretación de números y exploración de regularidades en la serie numérica. Propuesta didáctica para primer grado: “La lotería”.* Universidad de Buenos Aires, OPFyL.

- Dantzig, T. (1971). *El número. Lenguaje de la ciencia.* Buenos Aires, Hobbs Sudamericana.

- Dirección de Currícula (1992). *Los niños, los maestros/as y los números. Desarrollo Curricular. Matemática para 1º y 2º grado.* Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.

- Dirección de Educación General Básica (2001). *Aportes didácticos para el trabajo con la calculadora en los tres ciclos de la EGB*. Gabinete Pedagógico Curricular-Matemática. La Plata. Disponible en www.abc.gov.ar.

- Dirección de Educación General Básica (2001). *Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de los Números en el primer ciclo de la EGB.* La Plata. Disponible en www.abc.gov.ar.

- Dirección Provincial de Educación Primaria (2007). *Propuestas de Matemática para los inicios de primer año.* La Plata. Disponible en www.abc.gov.ar.

- Dirección Provincial de Educación Primaria (2008). *La enseñanza del cálculo en Primer Año.* La Plata. Disponible en www.abc.gov.ar.

- Ifrah, G. (1987). *Las cifras, historia de una gran invención.* Madrid, Alianza Editorial.

- Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). "El sistema de numeración: un problema didáctico". En Parra, C. y Saiz, I. (comps.). *Didáctica de Matemáticas.* Buenos Aires, Paidós.

- Lerner, D. (1992). *La matemática en la escuela aquí y ahora.* Buenos Aires, Aique.

- Lerner, D. (2005). "¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración". En Alvarado, M. y Brizuela, B. (comp.). *Haciendo números.* México, Paidós. Reproducido en Revista 12(ntes). Enseñar Matemática Nivel Inicial y Primario, nos 1 y 2, 2007.

- Lerner, D. (2007). "Hacia la comprensión del valor posicional". Ponencia presentada en las Jornadas sobre la Enseñanza de la Matemática, organizadas por 12(ntes) y Red Latinoamericana de Alfabetización. Buenos Aires. Reproducida en DVD en Revista 12(ntes). Enseñar Matemática Nivel Inicial y Primario, nº 5.

- Nemirovsky, M. (1995). "Leer no es lo inverso de escribir". En Teberosky, A. y Tolchinsky, L. *Más allá de la alfabetización*. Buenos Aires, Santillana.

- Nunes Carraher, T. (1989). "O Desenvolvimento mental e o Sistema Numérico Decimal". En Nunes Carraher, T. (org). *Aprender pensando.* Petrópolis, Voces.

- Ponce, H. y Wolman, S. (2010). "Numeración oral–numeración escrita. Tres perspectivas de análisis que abordan esta relación". En Revista del Instituto para el Estudio de la Educación, el Lenguaje y la Sociedad. Facultad de Ciencias Humanas. Universidad Nacional de La Pampa.

- Quaranta, M. E., Tarasow, P. y Wolman, S. (2003). "Aproximaciones parciales a la complejidad del sistema de numeración: avances de un estudio acerca de las interpretaciones numéricas". En Panizza, M. (comp.). *Enseñar Matemática en el Nivel Inicial y Primer Ciclo de EGB: Análisis y Propuestas.* Buenos Aires, Paidós.

- Sarmiento, D. (1882). *Método de Lectura Gradual.* Braine-le Comte (Bélgica). Reedición facsimilar, Editorial Tinta Fresca, 2004.

- Scheuer, N., Sinclair, A., Merlo de Rivas, S., y Tieche Chrisitinat, Ch. (2000). "Cuando ciento setenti y uno se escribe 10071: Niños de 5 a 8 años produciendo numerales". En Infancia y Aprendizaje, nº 90.

- Scheuer, N. y Germano, A. (2005). "Conocimientos matemáticos de niños de 4 a 7 años en entornos de alfabetización limitada". En Alvarado, M. y Brizuela, B. (comp.). *Haciendo números.* México, Paidós.

- Terigi, F. (1992). "En torno a la psicogénesis del sistema de numeración: estado de la cuestión, perspectivas y problemas". En Revista Argentina de Educación, vol. X, nº 17, abril.

- Terigi, F. y Wolman, S. (2007). "Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza". En Revista Iberoamericana de Educación, nº 43, OEI.

- Wolman, S. (2001). "La enseñanza de los números en el Nivel Inicial y en el primer año de la EGB". En Kaufman, A. M. (comp.). *Letras y Números. Alternativas didácticas para Jardín de infantes y Primer Ciclo de la EGB.* Buenos Aires, Santillana.

- Zacañino, L., Wolman, S. y Quaranta, M. (2009). "Avances de una investigación sobre los conocimientos infantiles sobre el sistema de numeración. La interpretación de números compuestos transparentes". IV Congreso marplatense de psicología. Universidad Nacional de Mar del Plata. Facultad de Psicología.

Buenos Aires
Av. Leandro N. Alem 720
C1001AAP
Ciudad de Buenos Aires
Tel.: (011) 4119-5000
info@santillana.com.ar

Córdoba
Esquiú 267
X5000ESD
Barrio General Paz, Córdoba
Tel./Fax: (0351) 421-4769
cordoba@santillana.com.ar

Mar del Plata
20 de Septiembre 1818
B7600CUL
Mar del Plata, Buenos Aires
Tel./Fax: (0223) 491-0026
mdp@santillana.com.ar

Mendoza
Rioja 1713
M5500AMI
Mendoza
Tel./Fax: (0261) 429-3135
cuyo@santillana.com.ar

Rosario
San Juan 621
S2000BDG
Rosario, Santa Fe
Tel./Fax: (0341) 447-4005
litoral@santillana.com.ar

Tucumán
24 de Septiembre 1014
T4000CNV
San Miguel de Tucumán
Tel./Fax: (0381) 430-5943
noa@santillana.com.ar

SANTILLANA

Claudia Broitman es Profesora de Enseñanza Primaria y Licenciada en Ciencias de la Educación (UBA).
Actualmente se desempeña como Profesora Titular de Didáctica de la Matemática en la Universidad Nacional de La Plata, miembro del equipo de Matemática de la Dirección de Currícula y Enseñanza y de la Escuela de Capacitación Docente del Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires y profesora en Institutos de formación docente. Es coautora del área de matemática de los Diseños Curriculares de Educación Primaria y de documentos de actualización didáctica de la Ciudad de Buenos Aires y de la Provincia de Buenos Aires, así como del Diseño Curricular de Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires. Es autora de artículos y libros para docentes de educación inicial y primaria y libros de texto. Ha investigado sobre el aprendizaje y la enseñanza del sistema de numeración y actualmente investiga sobre las matemáticas de adultos que inician la escolaridad primaria.

Verónica Grimaldi es Profesora en Física y Matemática (UNLP).
Actualmente se desmpeña como Profesora Adjunta de Didáctica Específica II y Prácticas Docentes en Matemática en la Universidad Nacional de La Plata, Profesora del Taller de Pensamiento Lógico-Matemático y de Historia de la Matemática en el Nivel Superior. Es autora y coautora de artículos y publicaciones para alumnos y docentes. Es coautora en el área de Matemática de los Diseños Curriculares de Educación Primaria y de documentos de actualización didáctica de la Provincia de Buenos Aires. Es también coautora de libros de texto de Matemática para nivel Primario y Secundario.

Héctor Ponce es Profesor de Enseñanza Primaria y Licenciado en Ciencias de la Educación (UBA).
Actualmente es miembro del equipo de Matemática en el trayecto formativo Análisis de las Prácticas de Enseñanza de Matemática en la Escuela Primaria que brinda el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD) del Ministerio de Educación de la Nación, dirigido a docentes del área de Matemática y profesores de práctica de los ISFD. Forma parte del equipo de Matemática de la Dirección de Currícula y Enseñanza y de la Escuela de Capacitación Docente del Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires. Es coautor en el área de Matemática del Diseño Curricular de Formación Docente de la CABA, y de documentos curriculares de la Ciudad y de la Provincia de Buenos Aires. Es autor de publicaciones para maestros y de libros de texto para niños. Investiga sobre la adquisición del sistema de numeración en alumnos que ya han elaborado sus primeros aprendizajes escolares.

2008977

ISBN 978-950-46-2528-5
9789504625285