CUADERNOS DE APOYO DIDÁCTICO

Estrategias de cálculo con números naturales

SEGUNDO CICLO
PRIMARIA

Claudia Broitman

SANTILLANA

Buenos Aires
Av. Leandro N. Alem 720
C1001AAP
Ciudad de Buenos Aires
Tel.: (011) 4119-5000
info@santillana.com.ar

Mendoza
Rioja 1713
M5500AMI
Mendoza
Tel./Fax: (0261) 429-3135
cuyo@santillana.com.ar

Córdoba
Esquiú 267
X5000ESD
Barrio General Paz, Córdoba
Tel./Fax: (0351) 421-4769
cordoba@santillana.com.ar

Rosario
San Juan 621
S2000BDG
Rosario, Santa Fe
Tel./Fax: (0341) 447-4005
litoral@santillana.com.ar

Mar del Plata
20 de Septiembre 1818
B7600CUL
Mar del Plata, Buenos Aires
Tel./Fax: (0223) 491-0026
mdp@santillana.com.ar

Tucumán
24 de Septiembre 1014
T4000CNV
San Miguel de Tucumán
Tel./Fax: (0381) 430-5943
noa@santillana.com.ar

SANTILLANA

CUADERNOS DE APOYO DIDÁCTICO

Estrategias de cálculo con números naturales

SEGUNDO CICLO PRIMARIA

Claudia Broitman

SANTILLANA

Broitman, Claudia
Estrategias de cálculo con números naturales : Segundo ciclo . - 2a ed. - Buenos Aires : Santillana, 2011.
80 p. ; 19x13 cm. - (Cuadernos de apoyo didáctico)

ISBN 978-950-46-2518-6

1. Matemática. 2. Cálculo. 3. Enseñanza Secundaria. I. Título
CDD 510.12

Av. Leandro N. Alem 720 (C1001 AAP) Ciudad Autónoma de Buenos Aires.
ISBN: 978-950-46-2518-6
Hecho el depósito que marca la ley 11.723
Impreso en la Argentina. Printed in Argentina
Primera edición: mayo de 2005
Segunda edición: diciembre de 2011

Este libro se terminó de imprimir en el mes de diciembre de 2011
en Artes Gráficas Color Efe, Paso 192, Avellaneda, Buenos Aires, República Argentina.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la humanidad se han utilizado diferentes estrategias de cálculo y recursos (ábacos, piedras, nudos en sogas, etc.). Algunas de las formas de calcular de otras épocas han desaparecido, otras permanecen y se han ido transformando, también han surgido nuevas. Estos cambios se debieron a necesidades de cada época. Incluso se ha transformado la proporción de personas que dominan los procedimientos de cálculo; así, lo que en el pasado era dominio de unos pocos, en los últimos siglos la ampliación del acceso a la educación ha permitido su difusión y en el presente ciertos cálculos forman parte de los conocimientos de uso social.

Las estrategias de cálculo no sólo varían a lo largo del tiempo sino también con las culturas. Incluso en el presente coexisten diversas formas de realizar y aun de representar las mismas "cuentas". Sin embargo, durante mucho tiempo en la escuela se ha enseñado una única estrategia para cada operación: las "cuentas tradicionales", o "algoritmos convencionales", mientras que la gran diversidad de estrategias posibles y también, en muchos casos, las diferentes formas de representación de éstas se han mantenido ocultas. Retomaremos esto más adelante.

La enseñanza del cálculo siempre integró los primeros contenidos escolares y en la actualidad su inclusión en la escolaridad básica obligatoria sigue siendo indiscutible; pero, ¿qué clases de cálculos?, ¿por qué medios de resolución?, ¿qué cálculos se pueden resolver mentalmente?, ¿cuáles requieren "cuentas" en el sentido tradicional del término?, ¿cuáles, de las múltiples maneras de resolver un cálculo, deben realizar los chicos?, ¿cómo enseñarles a los alumnos a estimar resultados y controlarlos después?, ¿qué función desempeña la calculadora en este proceso?, ¿qué "muestra" y "oculta" cada clase de cálculo?, ¿cómo abordar estrategias que los alumnos puedan utilizar con comodidad fuera de la escuela? Nos ocuparemos de éstas y otras cuestiones.

En el presente, dentro y fuera de la escuela los chicos enfrentan una gran diversidad de situaciones en las que necesitan realizar cálculos. Para hacerlo con eficiencia deben disponer de una variada gama de estrategias de cálculo –mental, estimativo, algorítmico y con calculadora– e incluso elegir la más conveniente según los números involucrados y la situación a resolver. Dominar una amplia variedad de estrategias les permitirá acceder a futuros aprendizajes escolares y utilizar la más conveniente en contextos extraescolares diversos. Por otra parte, el estudio del cálculo puede ser una buena fuente de recursos para adentrarse en las propiedades de los números y las operaciones, como también para iniciarse en un modo de pensar propio de la Matemática: la búsqueda de regularidades, la elaboración de reglas, la búsqueda de ejemplos y contraejemplos, la comparación de formas de resolución y escrituras, etcétera.

Sin duda algunos chicos parecieran tener más facilidad o encontrar más placer en el cálculo que otros. Sin desconocer esa diversidad, partimos de la convicción y de la experiencia de que, cuando se aborda la enseñanza sistemática y gradual de las diferentes estrategias de cálculo, todos los chicos pueden adquirir esos conocimientos. Por cierto, eso es posible bajo ciertas condiciones de enseñanza.

¿Cuáles son algunas condiciones de trabajo en el aula que favorecen la adquisición de estrategias de cálculo diversas en todos los alumnos? ¿Qué organización de la clase posibilita que todos tengan oportunidades de aprender progresivamente las diversas formas de resolver cálculos? Para ello es preciso que el docente asegure que habrá momentos para investigar relaciones y procedimientos, otros para difundir esos "descubrimientos", un tercer tipo destinado a registrar conclusiones, y, por último, momentos para sistematizar lo nuevo hasta que poco a poco se vaya convirtiendo en una herramienta disponible para todos los alumnos.

Cuando se presentan listas de ejercicios aislados de cálculo algunos alumnos los resuelven sin dificultad y otros esperan que la solución circule por la clase. El que ya sabe, se ejercita; el que aún no sabe, no aprende; sólo confirma que no le sale en el momento de la corrección.

Por el contrario, aquí se plantean problemas de cálculo que provocan un análisis del contenido y de las prácticas de resolución.

Problemas que, desde cierta gestión de la clase, promueven la exploración y el estudio sistemático de los conocimientos matemáticos involucrados. Por consiguiente, será necesario un espacio de trabajo colectivo, en torno de un análisis de los problemas que favorecen la producción de conocimientos nuevos y su reutilización posterior.

El papel del docente en esa gestión es relevante. ¿Cuáles serían sus tareas?

Entre ellas, consideramos:

- Presentar grupos de cálculos similares que posibiliten el hallazgo de regularidades, las cuales permitan el progreso desde las estrategias usadas para resolver los dos o tres primeros hasta las empleadas en los siguientes.
- Presentar los cálculos en forma de situaciones que exijan de los chicos la invención y producción de formas de resolución propias, sin esperar que todos procedan uniformemente bien desde el inicio.
- Luego de la resolución, seleccionar cuatro o cinco alumnos que hayan utilizado procedimientos diferentes para que expliquen a sus compañeros cómo trabajaron.
- Organizar esa exposición para que de los procedimientos menos avanzados se vaya hacia los más económicos, de manera que todos puedan seguir la comparación viendo qué economiza cada uno respecto del anterior.
- Proponer la comparación de diferentes procedimientos y analizar cuáles son correctos y cuáles no; promover el análisis y la justificación.
- Someter a análisis colectivo los errores individuales, procurando que ese intercambio de opiniones favorezca la explicitación de relaciones nuevas y así se convierta en una oportunidad para que todos aprendan.
- Proponer analizar la mayor o menor economía de las diversas estrategias sin inhabilitar ninguna, para que en otra clase los

chicos puedan apropiarse de las ajenas pero sin perder la posibilidad de recurrir a la menos avanzada.

- Sugerir estrategias nuevas que no hayan aparecido en la clase –en algunos casos válidas y en otros no– y someterlas a debate, en cuyo transcurso los alumnos tendrán que justificar y explicitar relaciones.

- Promover de manera explícita la utilización de modalidades de cálculo elaboradas por otros compañeros para nuevos cálculos similares.

- Registrar en papel afiche o en un cartel un ejemplo del nuevo tipo de cálculo, con la intención de que se lo pueda consultar durante un tiempo.

- Proponer a los alumnos que registren en sus carpetas las conclusiones que extraen de las estrategias válidas para reutilizar.

- Mostrar los avances en términos de cambios de estrategias y fomentar la toma de conciencia, por parte de los alumnos, acerca de los nuevos conocimientos que han producido.

- Identificar qué saberes matemáticos tienen relación con aquello que los chicos han encontrado, y proponer escrituras y vocabulario específico a partir de lo producido.

Estos roles del docente apuntan, por una parte, a generar un clima de investigación y producción de conocimientos y, por otra, a la difusión y reutilización de éstos por toda la clase. Las propiedades de los números y de las operaciones, usadas inicialmente en forma implícita, se explicitarán y se promoverá el avance hacia estrategias más económicas. Estas cuestiones serán desarrolladas en cada uno de los apartados, a propósito de las diferentes formas de cálculo.

El presente trabajo consta de cinco capítulos. En el primero –*Enseñar diferentes estrategias de cálculos mentales*– se abordan las razones por las cuales es interesante introducir a los alumnos en un tipo de razonamiento en torno de la diversidad de estrategias de cálculo. Se consideran algunas marcas del tipo de gestión de clase necesarias para instalar un trabajo de esa naturaleza y se incluyen ejemplos de tipos de problemas, que pueden abordarse con los alumnos, relacionados con conocimientos específicos.

En el segundo capítulo –*Enseñar a hacer cálculos estimativos*– se señala dónde reside la importancia de este tipo de cálculo y se presentan actividades, para realizar con los alumnos, ligadas a la enseñanza del cálculo aproximado, y a la anticipación en el caso del cálculo exacto. También se incluyen ejemplos de la función de esta clase de cálculo en la resolución de problemas.

En el tercer capítulo –*Enseñar a usar la calculadora*– se aportan criterios respecto de la inclusión de la calculadora electrónica en la enseñanza sistemática. Se abordan actividades dirigidas a que los chicos aprendan a usarla, conozcan los beneficios de su uso y sus límites. También se incluyen problemas que apuntan a estudiar propiedades de los números y de las operaciones en los que la calculadora tiene un papel central, en tanto permite verificar con rapidez las anticipaciones realizadas y seguir investigando nuevas descomposiciones posibles.

En el cuarto capítulo –*Enseñar diversos algoritmos (más o menos convencionales)*– se analiza la importancia de trabajar con los alumnos en torno del estudio de las operaciones que subyacen a los diferentes algoritmos. Se presentan ejemplos más desplegados de algoritmos, en los que una transparencia mayor permite tener más control de los pasos intermedios. También se incluyen problemas dirigidos a analizar estrategias ajenas, y a acortar o desarrollar pasos intermedios. Se propone, como cuestión central, la anticipación de resultados, por medio de un cálculo aproximado y el control posterior con calculadora.

Por último, en el quinto capítulo –*Enseñar a elegir por la estrategia más conveniente según el cálculo o el problema a resolver*– se intenta mostrar la importancia de que los alumnos, a partir de conocer una gama variada de estrategias, progresivamente vayan tomando decisiones respecto de la economía y pertinencia de cada una, para cálculos y resolución de problemas.

Todos los tipos de cálculos aquí planteados se presentan para trabajar con números naturales. Es evidente que las diversas estrategias de cálculo con números racionales (fraccionarios y expresiones decimales) también forman parte de los contenidos de segundo ciclo, a pesar de que no estén incluidas aquí.

Es necesario aclarar que el marco desde el cual se propone el trabajo con los alumnos en torno del cálculo se apoya en la producción de la Didáctica de la Matemática francesa. Esta disciplina, a partir de su gran desarrollo teórico y de investigación didáctica, permite en la actualidad considerar ciertas características necesarias para una gestión de la clase que posibilite el trabajo matemático en los chicos. También para que sus aprendizajes tengan sentido, sean los más próximos posibles al quehacer matemático y se los pueda reutilizar en problemas nuevos. Muchas de las investigaciones didácticas en torno del cálculo fueron fuente de inspiración de trabajos realizados en nuestro país, tanto de investigación y desarrollo curricular como de difusión (Ferreiro,1986; Lerner, 1992, Parra,1994; Saiz,1994; Dirección de Currícula de la Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 1997, 1999a, 1999b, 2003, 2004; Dirección de Educación Primaria de la Provincia de Buenos Aires, 2001a, 2001,b, 2001c), como también de materiales y experiencias de numerosas aulas en los cuales se basan en parte muchas de las propuestas que aquí se presentan.

CAPÍTULO I

ENSEÑAR DIFERENTES ESTRATEGIAS DE CÁLCULOS MENTALES

EL CÁLCULO MENTAL ES UN PROCEDIMIENTO PENSADO Y NO MECANIZADO

Cuando nos referimos a cálculos mentales estamos tomando la idea de cálculos reflexionados (Parra,1994). O sea que son aquellos para los que es necesario tomar decisiones respecto de cómo descomponer los números y qué cálculos parciales hacer. No necesariamente se los efectúa con rapidez ni en forma oral, también pueden ser escritos.
Una “marca” de que los chicos están haciendo cálculos mentales es, justamente, la presencia de una diversidad de procedimientos. Por ejemplo, si frente a este cálculo: 1 250 + 1 250 la totalidad de los chicos de una clase realizara

1 250 + 1 250

1 000 + 250 + 1 000 + 250

2 000 + 500 = 2 500

o

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 1\,250 \\ +\quad \\ 1\,250 \\ \hline 2\,500 \end{array}$$

podría afirmarse que los alumnos no están tomando decisiones, que esta estrategia es la única enseñada y exigida.

¿Por qué sería conveniente que los alumnos conocieran más formas de resolver el mismo cálculo?, ¿por qué se valora la diversidad de estrategias? Cuando se enseña un cálculo único los chicos lo realizan en forma mecánica y sin control de lo que están haciendo.

Siguen una serie de pasos estudiados, pero al confundir o saltear uno, aparece una gran cantidad de errores. Esto arroja resultados muy alejados del campo numérico posible. Sin embargo, muchos chicos no se dan cuenta de que el resultado no puede ser el que obtuvieron. Como no suelen tener la responsabilidad de elegir la forma de resolución, anticipar cuánto dará, ni controlar con posterioridad la pertinencia del resultado obtenido, aparecen errores como el siguiente:

$$\begin{array}{r} 1\,250 \\ +\ 1\,250 \\ \hline 13\,750 \end{array} \qquad \text{o} \qquad \begin{array}{r} 1\ 2\ 5\ \ 0 \\ +1\ 2\ 5\ \ 0 \\ \hline 2\ 410\ 0 \end{array}$$

que si bien se producen por una equivocación aparente, muestran que considerar la pertinencia de ese resultado no forma parte de los conocimientos disponibles. Más adelante se analizará cómo enseñarles a los alumnos la tarea de anticipación y control.

¿Qué otras estrategias podrían usarse, además de

$$\begin{array}{r} 1\,250 \\ +\ 1\,250 \\ \hline 2\,500 \end{array}$$

para resolver ese cálculo?

Por ejemplo:

1 250 + 1 000 = 2 250; 2 250 + 250 = 2 500

1 000 + 1 000 + 500 = 2 500

1 000 + 1 000 + 250 + 250 = 2 000 + 500 = 2 500

1 250 + 250 = 1 500 y 1 500 + 1 000 = 2 500

1 250 + 1 250 = 2 500

Si en una clase aparecen formas de resolución diferentes, es porque los chicos aprendieron a seleccionar la que consideran más sencilla, tienen a su cargo decidir qué números descomponer, pueden controlar los pasos intermedios de los cálculos que hacen y eligen las formas de representar cada cálculo. Abordaremos a continuación diferentes propuestas para que los alumnos adquieran esos conocimientos.

PARA HACER CÁLCULOS MENTALES ES PRECISO DISPONER DE ALGUNOS EN LA MEMORIA

Los adultos tenemos en la memoria un conjunto de resultados muy útiles para hacer otros cálculos. Por ejemplo, para el cálculo anterior ya sabemos que 1 000 + 1 000 = 2 000 o que 250 + 250 = 500. Para hacer cualquier cálculo mental nos apoyamos en resultados parciales conocidos. Sabemos que para los chicos es mucho más sencillo realizar cálculos con números que tengan la unidad seguida de ceros (a menudo también llamados números "redondos" o "nudos") aunque sean grandes, que hacerlo con números no "redondos", aunque sean más pequeños. Por ejemplo, es más sencillo realizar 4 000 + 4 000 e incluso 40 000 + 40 000 que 234 + 319.

Se propone que en cada año se presente un conjunto de cálculos sencillos, de números redondos, para que poco a poco los alumnos los utilicen para resolver otros (p. ej., usar 4 000 + 4 000 para resolver 4 120 + 4 120). Durante un tiempo los alumnos podrán consultar esos resultados, luego se realizarán actividades que les permitan sistematizarlos y organizarlos, y, por último, se propondrá su memorización.

Será provechoso trabajar durante varios días con cálculos similares, de modo que los chicos puedan establecer relaciones entre los resultados conocidos y los que buscan obtener.

Seguramente ya conocerán desde el primer ciclo algunos resultados. De no ser así, se pueden llevar a cabo algunas actividades para organizar los resultados conocidos por algunos alumnos del grupo, para que se vayan difundiendo. Será interesante confeccionar un cartel en el que se vayan completando los cálculos que se espera que sepan de memoria en un tiempo breve. Los chicos podrán completar los carteles y a la vez copiarlos en sus carpetas, para consultarlos por un tiempo. La intención es que empiecen a sistematizar y tomar conciencia de los cálculos que conocen y de los que están aprendiendo. Incluso podrán marcar con colores diferentes los conocidos y los que aún no conocen, e ir modificando esas marcas a medida que aumenta su repertorio de cálculos memorizados. Para practicar con esos cálculos podrán realizarse diversas actividades.

Actividades para favorecer la construcción de un conjunto de resultados memorizados

- Registrar sumas ya conocidas en grupos pequeños y luego completar la lista en forma colectiva.

Sumas que dan 10	**Sumas que dan 100**	**Sumas que dan 1 000**	**Dobles**	**Sumas de números "redondos"**	**Sumas sencillas o muy usadas**
6 + 4	30 + 70	200 + 800	2 + 2 = 4	100 + 20 = 120	150 + 150 = 300
			30 + 30 = 60	300 + 50 = 350	75 + 25 = 100
			300 + 300 = 600	400 + 20 + 3 = 423	125 + 125 = 250

- Registrar restas ya conocidas en grupos pequeños y luego completar la lista en forma colectiva.

Restas de números chicos	**Restas que dan números "redondos"**	**Restas fáciles**	**Restas que sabemos por los dobles**	**Restar 10 o 100**
15 - 8 = 7	456 - 56 = 400	100 - 25 = 75	800 - 400 = 400	34 - 10 = 24
13 - 6 = 7	29 - 9 = 20	150 - 25 = 125	20 - 10 = 10	340 - 100 = 240
		75 - 25 = 50	50 - 25 = 25	1 456 - 100 = 1 356

- Sumas de números "redondos"

100 + 100 =	4 000 + 600 + 30 + 6 =	100 000 + 600 +1 =
1 000 + 1 000 =	8 000 + 400 + 10 + 4 =	200 000 + 5 000 + 50 =
200 + 300 =	7 000 + 300 + 70 + 2 =	10 000 + 10 000 =
2 000 + 3 000 =	500 + 500 + 500 + 500 =	20 000 + 20 000 =
150 + 150 =	350 + 350 + 350 =	50 000 + 20 000 =
1 500 + 1 500 =	4 000 + 4 000 + 4 000 + 4 000 =	
2 400 + 2 300 =	250 + 250 + 250 + 250 + 250 =	
3 300 + 2 700 =	30 000 + 4 000 + 500 + 70 + 4 =	
2 000 + 300 + 50 + 2 =	20 000 + 5 000 + 600 + 30 + 2 =	

- Calcular mitades, dobles, triples y cuádruples de números "redondos"

Nº	Mitad	Doble	Triple	Cuádruple
100				
1 500				
2 500				
2 200				
500				

- Divisiones de números "redondos"

100 : 2 =	6 300 : 3 =	55 555 : 5 =
100 : 4 =	2 500 : 5 =	700 : 7 =
1 000 : 2 =	8 400 : 4 =	7 700 : 7 =
10 000 : 2 =	500 : 5 =	7 770 : 7 =
200 : 4 =	5 500 : 5 =	7 777 : 7 =
2 000 : 4 =	5 550 : 5 =	77 777 : 7 =
4 400 : 2 =	5 555 : 5 =	

Para estas actividades se sugiere presentar algunos cálculos que los chicos resolverán en forma individual; luego comunicarán cómo procedieron para obtener el resultado. Se espera que haya una difusión y circulación de estrategias, de manera que todos los chicos puedan apropiarse de las que encontraron sus compañeros.

- Hacer listas de cálculos memorizados.

Escriban en esta tabla cálculos que ya sepan de memoria. Al finalizar agreguen algunos de los resultados de sus compañeros, que ustedes se olvidaron pero en realidad también los saben.

Sumas	**Restas**	**Multiplicaciones**	**Divisiones**

Este tipo de actividades apunta a que los alumnos tomen conciencia de la cantidad de cálculos que conservan en su memoria. El reconocimiento de su utilidad será el impulso para aprender otros.

- Hacer listas de cálculos para memorizar

Se les propone a los alumnos completar la tabla con cálculos que sus compañeros sepan y ellos aún no recuerden. Tendrán que aprenderlos en un tiempo. Se podrán organizar momentos, diarios o semanales, dirigidos exclusivamente a ampliar el repertorio de cálculos memorizados.

Sumas	Restas	Multiplicaciones	Divisiones

- Inventar cálculos fáciles con números dados.

Esta tabla es para jugar al "Tutti Fruti". Se juega en grupos de a cuatro o cinco alumnos. Uno de cada grupo lee en silencio los números de esta lista. Un compañero dice "basta" y el alumno que leía los números anuncia cuál estaba leyendo. El resto de los chicos de ese grupo tiene que llenar la fila con cálculos que tengan ese número (puede ser uno de los números con los cuales operar o el resultado). El primero de cada grupo que llena su fila dice "Tutti Fruti". Si son correctos (los "dudosos" se comprueban con calculadora) es el ganador de la fila.

Lista de números: 1 500, 2 000, 200, 400, 15, 25, 250, 2 500, 125, 1 250, 3 000, 80, 4000, 150, 5 000, 500, 10 000, 100, 1 000, etc. (se pueden agregar o cambiar por otros números "redondos").
Por ejemplo, si el número leído es 500, los alumnos podrán llenar la fila correspondiente a ese turno de juego con algunos de estos cálculos:

Número	Sumas	Restas	Multiplicaciones	Divisiones	Ganador
500	500 + 500 = 1 000	400 - 100 = 300	500 × 10 = 5 000	500 : 5 = 100	

En algunos casos será necesario otorgar puntajes "por originalidad", tal como se realiza en el juego convencional, de modo de inhibir poco a poco que los chicos usen algún recurso como sumar o restar uno, multiplicar y dividir por uno, ya que esas soluciones no exigirían tratar con otras descomposiciones posibles. Incluso se puede decidir en conjunto con los alumnos cuáles cálculos ya no "valen" para jugar, porque son muy sencillos.

Actividades para aprender a usar resultados, dados o memorizados, para hacer otros cálculos

- Algunos cálculos ustedes ya los saben de memoria. Úsenlos para pensar en resultados de otros parecidos.

$$\boxed{2\,000 + 2\,000 = 4\,000}$$

Usen ese resultado para averiguar:

2 002 + 2 002 =
2 001 + 2 001 =
2 300 + 2 300 =
2 250 + 2 250 =
2 000 + 2 000 + 2 000 =

- Escriban otros cálculos que también se puedan hacer usando el resultado de 2 000 + 2 000.

- 1 200 + 1 200 = 2 400. Inventen cinco cálculos que se puedan resolver con mayor facilidad usando este cálculo.

- Usar el cálculo 2 345 + 2 345 = 4 690 para resolver estos otros cálculos. Escribir los resultados, luego verificarlos con la calculadora.
  2 345 + 2 346 =; 2 355 + 2 355 =; 2 340 + 2 340 =;
  2 347 + 2 348 =; 23 450 + 23 450 =

- Usar el cálculo 678 + 678 = 1 256 para resolver estos otros cálculos. Escribir los resultados y luego verificarlos con la calculadora.
  678 + 679 =; 679 + 679 =; 6 780 + 6 780 =; 680 + 680 =;
  688 + 688 =

- Usar el cálculo 1 250 x 7 = 8 750 para resolver estos otros cálculos. Escribir los resultados y luego verificarlos con la calculadora.
  1 251 x 7 =; 1 250 x 8=; 12 500 x 7=; 1 250 x 70=; 125 000 x 7=

- Para resolver estos cálculos pueden encontrar ayuda en algunos que están en los cuadros que ya llenaron. Escriban al lado de cada cálculo cuál de ellos "ayuda".
  1 234 + 1 234 = (se espera que los alumnos escriban 1 000 + 1 000 o 200 + 200 o 1 200 + 1 200, 4 + 4, etc.)

  42 + 62 =   150 + 156 =   4 500 - 1 500 =   300 - 149 =

COMPRENDER LAS RELACIONES ENTRE NÚMEROS AYUDA A MEMORIZAR RESULTADOS. EL CASO DE LA TABLA PITAGÓRICA

En el primer ciclo los chicos con seguridad han estudiado e intentado memorizar "las tablas de multiplicar", a veces con no muy buenos resultados. A los alumnos del cuarto año se les puede proponer un trabajo de exploración de las relaciones numéricas involucradas en la tabla pitagórica, lo que ayudará a su posterior memorización y reconstrucción, y prevendrá contra los "olvidos".

Veamos en la siguiente tabla pitagórica algunas relaciones.

×	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Los chicos de segundo ciclo ya suelen conocer la propiedad conmutativa: $4 \times 6 = 6 \times 4$; $7 \times 8 = 8 \times 7$, etc. Los alumnos podrán ensayar explicaciones de por qué en la tabla pitagórica algunos números se repiten y otros no.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Algunos alumnos notarán que entre las columnas hay relaciones de dobles, triples, cuádruplos, etc. Por ejemplo:

"los productos de la columna del 8 son el doble que los de la columna del 4",

"los productos de la columna del 4 son el doble que los de la columna del 2",

"los productos de la columna del 8 son el cuádruplo que los de la columna del 2",

"los productos de la columna del 6 son el doble que los de la columna del 3",

"los productos de la columna del 10 son el doble que los de la columna del 5", etcétera.

Evidentemente, los chicos podrán encontrar las razones de estas relaciones. Multiplicar por 8 equivale a hacerlo por 4 y luego por 2; multiplicar por 6 es igual que hacerlo por 3 y luego por 2, etc. En términos numéricos, $6 \times 9 = 6 \times 3 \times 3$ y $8 \times 8 = 8 \times 2 \times 2 \times 2$. La propiedad que interviene aquí es la asociativa. Develar estas relaciones permitirá reconstruir productos nuevos apoyándose en otros dados.

Por ejemplo:

- Dadas estas columnas, ¿cuáles otras podrás completar?

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0				0	0						
1				3	4						
2				6	8						
3				9	12						
4				12	16						
5				15	20						
6				18	24						
7				21	28						
8				24	32						
9				27	36						
10				30	40						

Otras relaciones que los alumnos podrán encontrar son algunas "sumas y restas". Por ejemplo, los productos de la columna del 3 sumados a los de la columna del 5 dan como resultado los productos de la columna del 8. Los productos de la columna del 7 también se obtienen de la suma de los de las columnas del 4 y el 3 o de la diferencia entre los de las columnas del 9 y el 2. Esto "funciona" por la propiedad distributiva de la multiplicación:

$6 \times 8 = 6 \times 5 + 6 \times 3$

$9 \times 7 = 9 \times 9 - 9 \times 2$

Para reutilizar estas relaciones los alumnos podrán realizar actividades como las siguientes:

- A partir de estas columnas, y sumando y restando, obtener los resultados de otras.

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0			0	0							
1			2	3							
2			4	6							
3			6	9							
4			8	12							
5			10	15							
6			12	18							
7			14	21							
8			16	24							
9			18	27							
10			20	30							

Luego del estudio de estas relaciones entre los números de la tabla pitagórica y de la identificación de las propiedades que subyacen a estas relaciones, los alumnos estarán en mejores condiciones para la memorización. Ésta exigirá, sin duda, un tiempo de trabajo en el que los chicos aumentarán progresivamente los resultados memorizados. Pueden proponerse tablas vacías y que los alumnos, durante varias semanas, completen en un tiempo dado con los resultados que ya conocen. Para la próxima vez deberán estudiar los que aún no lograron memorizar.

O bien completar partes de la tabla pitagórica:

×	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2											
4											
6											
8											

×	6	7	8	9
6				
7				
8				
9				

Se intentará favorecer el estudio de la totalidad de los resultados de la tabla en forma conjunta, para no “perder de vista” las relaciones numéricas analizadas.

LAS ESTRATEGIAS DE CÁLCULO MENTAL SE APOYAN EN PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES Y DE LOS NÚMEROS

Los chicos –y también los adultos– usan intuitivamente las propiedades de las operaciones incluso cuando no conocen sus nombres o no las explicitan. En el segundo ciclo se tratará de proponer conjuntos de cálculos similares que apuntan a una misma estrategia. Algunos alumnos inventarán estrategias para resolverlos; ellas podrán difundirse al resto de la clase y luego practicarse. Se espera que a través de un uso inicial intuitivo de cada propiedad, cada una pueda explicitarse y reutilizarse.

Los cálculos mentales se apoyan en las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva, así como en las propiedades del sistema de numeración decimal.

ACTIVIDADES PARA USAR Y ESTUDIAR PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES

- ¿Son iguales o no? Colocá verdadero o falso sin hacer la cuenta. Justificá tu respuesta. Luego verificá tus anticipaciones con la calculadora y encontrá en qué te confundiste.

3 591 + 98 765 + 91 232 = 91 232 + 98 765 + 3 591
4 356 + 4 002 = 4 000 + 4 000 + 356 + 2
209 + 205 + 1 202 = 1 200 + 200 + 200 + 14 + 2
239 × 12 = 200 × 10 + 39 × 12
239 × 12 = 239 × 10 + 239 × 2
239 × 12 = 239 × 4 × 3
239 × 12 = 239 × 6 × 6
398 × 14 = 398 × 7 × 2
398 × 14 = 398 × 10 × 4
398 × 14 = 398 × 10 + 398 × 4

5 460 : 12 = 5 460 : 4
y el resultado : 3
5 460 : 12 = 5 460 : 10 + 5 460 : 2
5 460 : 12 = 5 460 : 10
y luego el resultado : 2
5 460 : 12 = (5 460 : 6) : 2
6 780 : 18 = 6 780 : 9
y el resultado : 2
6 780 : 18 = 6 780 : 10 + 6 780 : 8
6 780 : 18 = (6 780 : 6) : 3

Algunos de los cálculos seleccionados son válidos y otros no. El objetivo de esta actividad es, justamente, discutir, luego de la resolución, que en la suma y en la multiplicación se pueden aplicar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva para la suma y la multiplicación. También apunta a analizar por qué multiplicar por 10 y luego por 4 no es equivalente a hacerlo por 14 sino

a multiplicar por 40. Por último, respecto de la división será necesario enunciar que el divisor puede descomponerse en factores (dividir por 12 equivale a dividir primero por 4 y luego por 3) y no en dos números que sumados den 10 (dividir por 10 y luego por 2 equivale a dividir por 20, pero no a hacerlo por 12).
Las actividades siguientes apuntan a reinvertir los conocimientos nuevos producidos a partir del problema anterior:

- Escribí diferentes formas de realizar estos cálculos. Luego, discutí con tu compañero si son correctas. Finalmente, verificá las "dudosas" con la calculadora.

3 451 + 2 222 =
a)
b)
c)

3 672 - 1 431 =
a)
b)
c)

3 461 × 12 =
a)
b)
c)

9 142 : 14 =
a)
b)
c)

- ¿Cuál de los cálculos de la primera columna dará lo mismo que los de la segunda columna?

24 × 36	3 × 2 × 6 × 6 × 2
24 × 48	2 × 6 × 6 × 6
36 × 12	6 × 4 × 6 × 6
	8 × 3 × 2 × 6 × 4

- Realizá estos cálculos en la calculadora sin apretar la tecla del 2. Anotá qué cálculos vas haciendo.

2 000 + 200 =	2 000 × 5 =	360 : 12 =
2 200 + 20 =	2 002 × 2 =	4 000 : 20 =
3 200 - 1 200 =	10 × 12 =	
2 500 - 1 200 =	20 × 6 =	

En este caso, la restricción de no usar el 2 obliga a realizar diferentes descomposiciones. ¿Cuáles serán válidas y cuáles no? ¿Por qué? También la intención aquí es reutilizar las propiedades aprendidas.

El problema siguiente también consiste en la propiedad distributiva, aplicada a un caso puntual: números que tienen uno más o uno menos que un número redondo. Por ejemplo, operar con 19, 199, 2 999 o 101, 3 001, 1, etcétera.

20 x 19 puede pensarse como 20 x 10 + 20 x 9 o como 20 x 20 - 20

Se puede comenzar con números pequeños: 3 x 19; 2 x 29; 4 x 49, y después de comparar las estrategias usadas se muestra la economía de "redondear para arriba", pensando el 19 como 20, el 29 como 30, etcétera.

Una vez identificada y difundida esta estrategia, se podrá investigar con números mayores: 120 x 99; 199 x 5; 1 999 x 20, etcétera.

La misma estrategia también se podrá usar para "redondear para abajo" y luego agregar. Por ejemplo:

101 x 8 se piensa como (100 x 8) + (1 x 8)

2 001 x 5 se piensa como 2 000 x 5 y al resultado se le suma 5, etcétera.

Como hemos mencionado varias veces, se tratará de ofrecer una serie de cálculos similares, y luego de la explicitación y difusión de las estrategias, se practicarán y finalmente se evaluarán los mismos tipos de cálculos que se enseñaron.

- Realizá estos cálculos usando la estrategia de multiplicar por el número redondo más próximo y luego restar o sumar:
- Sabiendo que 12 x 14 = 168, resolvé los cálculos siguientes

199 × 20 =	19 × 200 =	2 001 × 20 =
201 × 10 =	1 999 × 10 =	2 002 × 3

sin hacer las cuentas:

En este caso el problema exige establecer relaciones entre los fac-

168 : 12 =	168 : 3 =	168 : 4 =
168 : 14 =	168 : 7 =	168 : 42 =
168 : 6 =	168 : 2 =	

tores en los cuales se pueden descomponer el 12 y el 14. Como 12 es equivalente a 6 x 2, y 14 a 7 x 2, será necesario analizar, por un lado, la operación inversa y establecer relaciones del tipo "si divido por 14 da 12; si divido por 7, como es la mitad, dará el doble".

- Sin hacer la cuenta de dividir, pensá cuál va a ser el resto:

En este caso el conocimiento experto, que permite resolver este

201 : 2 =	3 334 : 3 =	2 001 : 4 =
203 : 5 =	666 : 6 =	2 002 : 4 =
12 001 : 2 =	667 : 6 =	2 003 : 4 =
3 333 : 3 =	2 000 : 4 =	2 004 : 4 =

problema, son los criterios de divisibilidad. Sin embargo, aunque los alumnos aún no los hayan estudiado, podrán deducir cuál es el resto apelando al cálculo mental, dado que son números redondos cuyas divisiones casi están disponibles y memorizadas. Será interesante elegir uno o dos de éstos para que los alumnos los resuelvan en forma individual. Si no encuentran la forma sin hacer la cuenta, se puede habilitar esta estrategia. En la puesta en común se intentará que circulen explicaciones del tipo: "Como 200 : 2 es 100 y no sobra nada, si es 201 sobra 1", o "si 666 : 6 es 111, con 667 sobrará 1 también", etcétera.

Actividades que apuntan a explorar la relación entre dividendo, divisor, cociente y resto

Se pueden presentar problemas que apunten, en primer lugar, a que los alumnos pongan en juego la relación dividendo = divisor × cociente + resto.

Si los chicos no conocieran o no recordaran los nombres de cada uno de los papeles que desempeñan los números en una división, se los puede presentar, para que los recuerden, o informar, para que los consulten mientras resuelven los problemas.
Por ejemplo:

- En la cuenta de dividir, cada número recibe un nombre según la función que ocupa.

$$\begin{array}{rrl|ll} \text{Dividendo} \rightarrow & 102 & & 5 & \leftarrow \text{Divisor} \\ \cline{4-4} \text{Resto} \rightarrow & 2 & & 20 & \leftarrow \text{Cociente} \end{array}$$

No se trata de comunicar de entrada la relación informando que el cociente por el divisor más el resto equivalen al dividendo, sino de tener la oportunidad, durante algunas clases, de explorar esa relación con problemas sencillos, al comienzo apuntando a su uso más implícito y explicitarla con posterioridad.

Con algunos de estos problemas los chicos podrán explorar que el dividendo se obtiene a partir del producto del divisor y el cociente más el resto.

Por ejemplo:

- ¿Cuál será el dividendo si el resto es 3, el divisor es 7 y el cociente es 121?

$$\begin{array}{rl} 124 & \underline{|\,5\quad} \\ 4 & \ \ 25 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 4\,567 & \underline{|\,8\quad} \\ 7 & \ \ 555 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 3\,476 & \underline{|\,23\quad} \\ 24 & \ \ 124 \end{array}$$

- ¿Existen estas cuentas? Si te parece que hay errores explicá cómo te diste cuenta.
- ¿Existe una cuenta con cociente 18, divisor 18 y resto 4? ¿Cuál será el dividendo?

Otros problemas apuntarán a que tomen conciencia de que el resto siempre es menor que el divisor. Por ejemplo:

- ¿Puede ser 4 el resto de un número dividido 7?

- ¿Puede ser 7 el resto de un número dividido 4?

- ¿Existe una cuenta con resto 18 y divisor 4?

- ¿Cuántos restos diferentes puede haber en una cuenta cuyo divisor es 14?

Y algunos permitirán explorar la gama de soluciones posibles. Por ejemplo:

- Buscá diferentes cuentas con cociente 14 y divisor 8. ¿Cuántas soluciones tienen?

- Pensá cuentas que tengan cociente 12 y divisor 5. ¿Cuántas soluciones hay?

- ¿Hay cuentas con cociente 18 y divisor 4? Si respondés que sí, ¿cuántas hay?

- ¿Cuántas cuentas hay que tengan resto 4 y divisor 5?

- ¿Cuántas cuentas pueden tener divisor 4 y resto 5?

Mediante la resolución y el debate en torno de estos problemas se podrán ir registrando conclusiones acerca de en qué casos no hay cuenta posible, en cuáles hay varias soluciones, cuál es la forma de encontrar el dividendo, y qué restricciones hay en la relación entre el resto y el divisor.

Es importante anticipar que aun cuando los chicos estén en condiciones de resolver divisiones por medios algorítmicos, muchos de estos problemas les presentarán desafíos nuevos.

ACTIVIDADES PARA TRABAJAR CON LA MULTIPLICACIÓN POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS

Seguramente los chicos habrán estudiado la regla de la multiplicación por la unidad seguida de ceros en el primer ciclo. Los problemas que aquí se proponen apuntan a una mayor profundización de su uso, a su extensión a nuevos tipos de problemas y cálculos, y a elaborar una comprensión mayor de las razones por las cuales se agregan ceros.

- Completá las primeras columnas de la tabla –sin usar la calculadora– y luego verificá los resultados obtenidos.

Número original	Operación a realizar	Número a obtener	Control con calculadora
45		45 000	
	× 10	50	
	× 100	200 000	
34		340	
	÷ 100	24 000	

- Completar series de cálculos realizados con la calculadora. Por ejemplo: sigan la serie de pasos de cálculos para lograr que, en el visor de la calculadora, les aparezca, en forma sucesiva, la siguiente serie de números:

3	3 000	300	30 000	3

Los alumnos podrán probar con diferentes cálculos y registrar cada intento. Por ejemplo:

3 × 100 = 300 no me dio	300 × 100 = 30 000 sí me dio
3 × 1 000 = 3 000 sí me dio	30 000 : 100 = 300 no me dio
3 000 × 10 = 30 000 no me dio	30 000 : 1 000 = 30 no me dio
3 000 : 10 = 300 sí me dio	30 000 : 10 000 = 3 sí me dio

- ¿Por qué se agregan o quitan ceros?

Una vez que los chicos se manejan con comodidad con la regularidad entre la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros, será interesante promover con ellos un debate acerca de por qué se agregan ceros. Una estrategia posible de organización de la clase será que cada grupo disponga de un tiempo para preparar una explicación que convenza a los demás compañeros. Se espera que puedan analizar los fundamentos de la regla que descubrieron y usan. Por ejemplo, con pensamientos como "al multiplicar el 3 por diez, el 3, que era de las unidades, pasa a ser de las decenas y es necesario un 0 para llenar la posición vacía de las unidades. Si se multiplica por 100, pasa a ser 3 centenas y se precisan dos ceros para la posición de decenas y unidades" o "el 3 por diez es treinta y si no le ponés el cero, el tres sigue siendo un tres, hay que correrlo para el lugar de las decenas", etcétera.

Estudiar la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros será útil para resolver una gran cantidad de cálculos.

5 000 × 4 =	200 × 22 =	45 670 : 10 =
40 000 × 5 =	20 × 5 000 =	
20 000 × 4 =	10 000 : 10 =	

- Completar el número que falta y verificar con calculadora:

32 ×	= 320	32 ×	= 320 000	47 000 ×	= 470 000
32 ×	= 3 200	47 000 :	= 47	47 000 :	= 47
32 ×	= 32 000	47 000 :	= 470		

- Escribir en la calculadora el 56. ¿Qué cálculo le harías para que se convierta en 560?, ¿y en 5 600?, ¿y en 56 000?, ¿y en 56 000 000?

- Escribir en la calculadora el número 18. ¿Qué cálculo harías para que se convierta en 180?, ¿y en 1 800?, ¿y en 18 000?, ¿y en 180 000?

- Escribir en la calculadora el número 33 000 000. ¿Qué cálculo harías para que se convierta en 33 000?; ¿y en 33?, ¿y en 330?

- Un juego para jugar de a parejas. Precisan una calculadora. Un compañero anota un número (por ejemplo, 35). Le da la calculadora a su compañero quien debe transformarlo haciendo una cuenta que cambie el 35 por otro. Solamente puede usar los signos de × y % y los números 10, 100 y 1 000, y su compañero no debe verlo. Le devuelve el número transformado (por ejemplo, si apretó × 100 le devolverá el 3 500). El primer compañero debe volver a transformarlo en el 35 (como deberá hacer lo inverso que hizo su compañero, en este caso deberá dividir por 100).

- Dividir y multiplicar con muchos ceros

Dividir y multiplicar por la unidad seguida de ceros permite hacer cálculos con números muy grandes en forma muy veloz (no hace falta saber cómo se llaman los números, aunque luego puedan averiguarlo).

1 000 000 000 000 000 000 : 1 000 000 000

1 000 000 000 × 1 000 000 000

Seguramente algunos chicos harán la cuenta o tratarán de escribir esos números en la calculadora. Será suficiente con que algunos encuentren una estrategia ligada a contar los ceros para generar un momento de difusión de ésta. Lo interesante de esa estrategia es que permite resolver el cálculo aunque no se sepa el nombre del número.

- ¿Cuáles de estos cálculos dan el mismo resultado? No se puede hacer la cuenta.

3 000 × 4 000 =	300 × 4 000 =	12 × 1 000 000 =
300 × 40 000 =	3 000 × 400 =	12 × 100 000 =
400 × 30 000 =	3 × 4 000 000 =	3 000 000 × 4 =

Éste también será un problema complejo para muchos chicos. Se apuntará a que, en parejas o en grupos pequeños, exploren cómo hacer para darse cuenta sin hacer el cálculo. Luego de un tiempo de investigación se organizará un trabajo colectivo en torno de la explicitación de los criterios usados para anticipar la igualdad de cálculos.

ACTIVIDADES PARA AVERIGUAR EL RESTO EN LA DIVISIÓN POR LA UNIDAD SEGUIDA DE CEROS

- ¿Se puede saber cuál será el cociente y el resto sin hacer la cuenta? Si no te sale, hacé la cuenta e intentá en el siguiente ver si se puede saber sin hacer cuentas.

Número	Divido por	Cociente	Resto
34	10	3	4
980	10		
343	100		
2 345	100		
2 000	10		

- Juan dice que mirando el número 4 567 sabe cuál va a ser el resto al dividir por 1 000, por 100 y por 10, ¿puede saber sólo mirando el número?, ¿cómo hace?

Actividades para investigar el rol del cero y el uno en las diferentes operaciones

Otro aspecto interesante para trabajar con los chicos es el llamado "elemento neutro" y "elemento absorbente". En términos de los chicos se les puede proponer investigar el rol del 0 y del 1 en las diferentes operaciones. Por ejemplo:

- ¿Qué sucede cuando se suma, resta, multiplica o divide por 1? ¿Y por 0? ¿Hay alguna operación que no se pueda hacer? Escriban en grupo las conclusiones a las que arriben y den un ejemplo de cada afirmación.

- Encontrar rápido los resultados de estos cálculos (no es necesario saber cómo se llaman los números para realizarlo, aunque pueden averiguarlo luego):

4 556 432 : 4 556 432 =	345 877 542 - 1 =	111 111 111 111 : 1 =
64 656 632 × 0 =	345 098 980 + 1 =	
123 454 656 432 × 1 =	145 654 123 + 0 =	

CAPÍTULO II

ENSEÑAR A HACER CÁLCULOS ESTIMATIVOS

En la actualidad es necesario que los alumnos puedan disponer de estrategias que les permitan hacer cálculos estimativos. Una de las razones es que existe una gran cantidad de situaciones en las que es suficiente con un cálculo estimativo para responder una pregunta. Son numerosos los momentos en los que nos vemos enfrentados a estimar: ¿nos alcanza el dinero para comprar estos productos?, ¿cuánto costarán, aproximadamente, unas vacaciones?, ¿qué voy a pagar cuando cobre ese dinero que me deben? En la escuela este tipo de cálculos puede enseñarse de modo que todos los chicos se apropien de estrategias de redondeo y cálculo aproximado, útiles para resolver una gran variedad de problemas.

Además los cálculos estimativos tienen otra función importante: permiten anticipar el resultado de un cálculo exacto. Saber con anticipación entre qué números puede estar el resultado de un cálculo es un conocimiento que luego permite controlar si el resultado obtenido es posible o no. Justamente, la mayor parte de los errores en cálculos es detectada por nosotros con facilidad porque un cálculo estimativo sencillo nos permite reconocer la imposibilidad del resultado obtenido. Enseñar a hacer cálculos estimativos permitirá a los alumnos tener estrategias de anticipación y control de resultados, y con ese propósito deben enseñarse.

Actividades para calcular resultados aproximados

Se espera que los problemas siguientes, como ya se ha mencionado, presenten un desafío a los alumnos. Se sugiere darles un tiempo de exploración del primero o del segundo cálculo, en cada caso, y luego se propone un espacio de comunicación de procedimientos, de manera que para los cálculos siguientes todos puedan reutilizar las estrategias que se encontraron y explicaron al conjunto de la clase. No son ejercicios para practicar algo aprendido, sino problemas novedosos para la mayor parte de los alumnos; por lo tanto, requerirán un tiempo de investigación, estudio, difusión de buenas ideas, reutilización de estrategias ajenas, y de explicitación y registro de conclusiones.

- Sin hacer la cuenta, decidir cuál será el resultado aproximado. Luego verificar con la calculadora.

	Menos de 2 000	**Entre 2 000 y 4 000**	**Más de 4 000**
1 547 + 3 421			
2 389 + 1 262			
4 598 - 4 587			
8 978 - 1 234			
1 345 × 5			
499 × 3			
8 987 : 2			
2 871 : 19			

- ¿Qué podés saber de estos cálculos antes de hacerlos? ¿Cuánto va a dar cada uno, más o menos? ¿más de cuánto? ¿menos de cuánto?

9 765 + 76 438 + 8 653 =	3 465 - 1 254 =	20 457 × 4 =
7 564 + 9 123 + 9 933 =	1 984 -109 =	9 217 : 9 =
10 234 + 10 456 + 10 432 =	2 391 × 6 =	8 137 : 6 =
9 874 - 8 765 =	9 811 × 2 =	6 551 : 7 =
	7 777 × 3 =	

Verificá con la calculadora si las anticipaciones fueron correctas. Discutan entre todos cómo hacer para darse cuenta del resultado aproximado sin hacer la cuenta.

- Sin hacer la cuenta, marcá los resultados que te parece que no pueden ser correctos y escribí cómo te diste cuenta (tené presente que podrían estar todos mal):

8 933 + 11 234 = 10 056	8 912 - 8 888 = 24	10 345 : 5 = 51 725
8 933 + 11 234 = 9 342	8 912 - 8 888 = 1 121	10 345 : 5 = 12 395
7 992 + 4 561 = 12 553	3 897 x 12 = 4 567	98 124 : 2 = 49 062
7 992 + 4 561 = 12 000	3 897 x 12 = 46 764	98 124 : 2 = 49 063
9 742 - 4 561 = 5 181	9 812 x 98 = 961 576	
9 742 - 4 561 = 1 234	9 812 x 98 = 961 577	

- ¿Será mayor o menor? Colocá el signo mayor o menor sin hacer la cuenta exacta.

21 376 × 9	100 000	23 457 + 21 098 + 35 987	70 000	34 765 : 9	3 400
10 984 × 17	100 000	9876 + 2134 + 111	20 000	123 987 : 4	40 000
34 671 × 99	3 467 100				

- Mirando la primera cuenta, anticipá si las otras van a dar más o menos. Justificá tu respuesta y luego probá con la calculadora si anticipaste bien.

4 536 : 3 = 1 512	***8 888 : 8 = 1 111***
4 636 : 3	8 888 : 3
4 536 : 4	8 888 : 9
4 536 : 2	9 999 : 8
5 536 : 3	16 000 : 8
9 000 : 6	

ACTIVIDADES PARA HACER CÁLCULOS ESTIMATIVOS ANTES DE HACER CÁLCULOS EXACTOS

- ¿Cuál será el resultado aproximado de estos cálculos?

$$\begin{array}{r} 1\,234 \\ +\;4\,536 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15\,689 \\ -\;2\,087 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,349 \\ \times\;\;18 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 95\,876 & 19 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Para 1 234 + 4 536 se espera que los alumnos puedan pensar que dará más de 5 000 (por 1 000 y 4 000) y menos de 7 000 (redondeando a 2 000 y 5 000) o que 1 200 + 4 500 = 5 700 y el resultado estará cerca de ese número.

Para 15 689 - 2 087 se espera que puedan pensar que redondeando a 15 000 - 2 000 el resultado estará cerca de los 13 000. También podrían pensar que 15 600 - 2 000 = 13 600 y el resultado estará cerca de ese número.

Para 2 349 × 18 se espera que puedan pensar que redondeando a 2 000 x 20 el resultado estará cerca de los 40 000.

Y para 95 876 : 19, que puedan pensar a partir de 100 000 : 20 que es cercano a 5 000.

- ¿Entre qué números puede estar el resultado? Luego hacé la cuenta y verificá que los resultados se encuentren entre los números que pensaste. Cualquier duda verificá con la calculadora.

$$\begin{array}{r} 2\,345 \\ +\ 6\,934 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\,097 \\ -\ 5\,493 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2\,398 \\ \times\ \ 29 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 34\,561 & 23 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

ACTIVIDADES PARA APRENDER QUE EN ALGUNOS PROBLEMAS ES SUFICIENTE CON CÁLCULOS ESTIMATIVOS

- El presidente de la cooperadora de la escuela calcula que para la fiesta de fin de curso tendría que haber 200 gaseosas ¿Alcanzan 21 paquetes de 12 botellas cada uno?

- Para una excursión hacen falta \$ 54 para el micro, \$ 27 para la merienda y \$ 48 para las entradas. En el grado hay 31 chicos. ¿Alcanza si cada uno trae \$ 5?

De hecho, muchos chicos resolverán estos problemas con cálculos exactos. No se trata de inhibir esta resolución, sino de debatir después acerca de si esos cálculos son en realidad necesarios, ya que para responder la pregunta que plantea cada problema es suficiente con cálculos aproximados.

CAPÍTULO III

ENSEÑAR A USAR LA CALCULADORA

LA CALCULADORA EN LA ESCUELA PUEDE FAVORECER UN TRABAJO REFLEXIVO

A veces el uso de la calculadora en el aula provoca cierto temor en los docentes. En ocasiones se teme que ello redunde en un dominio menor del cálculo algorítmico por parte de los chicos, porque: "Si usan la calculadora entonces nunca van a hacer los cálculos bien, porque no van a practicar". Otra idea que suele aparecer es que la calculadora evitará el razonamiento de los chicos, ya que: "Si usan la calculadora no van a tener que pensar".

Trataremos de mostrar que los chicos pueden aprender a hacer un uso reflexivo de la calculadora y que, lejos de dificultar el aprendizaje de los cálculos, podrán aprender más a partir de explorar y usar esta herramienta.

Además de que la calculadora puede ser una herramienta potente para plantear problemas que exijan investigar propiedades de los números y de las operaciones, en la sociedad actual tiene un uso y una difusión crecientes, por lo que la escuela no puede ignorar su practicidad y economía. Es mejor enseñar su manejo a los alumnos, que adquieran herramientas que les permitan explicar y controlar lo que sucede, y que estén en condiciones de analizar la conveniencia de usarla en cada situación.

Por último, hay una razón mucho más potente para introducir la calculadora en la escuela: también permite abordar un tipo de práctica anticipatoria, cuando pedimos a los chicos que analicen cómo van a cambiar los números al realizar ciertos cálculos o que averigüen qué cálculos, que generaron ciertas transformaciones, se hicieron con la calculadora. Por ejemplo:

- Tenés que lograr que en la pantalla te vayan cambiando estos números por el siguiente, pero sólo podés hacer un cálculo por vez:

3	30	300	30 000	3	300	3	3 000

- ¿Cómo hacés para sumar 2 222 + 3 333 sin apretar la tecla del 2?

Si bien la calculadora permite ir probando, necesariamente los alumnos tenderán a buscar una regularidad que les permita obtener los resultados con rapidez. O sea que la calculadora, lejos de generar prácticas mecánicas en los chicos, puede ser una buena fuente para plantear problemas anticipatorios.

ES NECESARIO ENSEÑAR A USAR LA CALCULADORA

Si en el primer ciclo los chicos no utilizaron la calculadora, será necesario enseñarles a usarla. Inicialmente que conozcan las teclas, el procedimiento de encendido y apagado, la necesidad del signo igual para que aparezcan resultados, y algunas características específicas, por ejemplo, qué sucede cuando se repiten ciertas teclas.

ACTIVIDADES PARA APRENDER A USAR LA CALCULADORA

- Realizar en la calculadora cálculos cuyos resultados conozcas para ver si te salen bien.

- Realizar los siguientes cálculos en la calculadora y anotar los resultados:

234 × 12 = 345 + 567 = 10 000 - 345 =

- Investigá qué sucede con el resultado cuando se aprieta reiteradamente un signo = o + o -. Probar de hacer un cálculo 5 + 5 = = = o 5 + 5 + + + + + o 5 + + = =. Probar con diferentes calculadoras.

ACTIVIDADES PARA APRENDER A USAR LA CALCULADORA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE MUCHOS PASOS

La calculadora permite resolver problemas complejos cuando hay un caudal importante de información y varios cálculos para hacer. Para una gran cantidad de alumnos la tarea de resolver un problema de muchos pasos es de tal nivel de complejidad, que tener que resolver cálculos en forma simultánea les dificulta mucho la tarea. Para favorecer el trabajo de análisis de los enunciados y de las operaciones que hay que hacer para resolver la situación, una opción es que los alumnos puedan dejar de lado la tarea de los cálculos. Así la calculadora pasa a ser una herramienta eficaz en todas aquellas clases en las que la tarea central del alumno es decidir qué operaciones tiene que hacer para resolver el problema planteado. Por ejemplo:

- Andrés quiere comprar un televisor que cuesta $ 656. Tiene ahorrados $ 128 y en el trabajo le adelantarían 234 pesos más. Él piensa que podría pagar con todos sus ahorros al contado y el resto en 6 cuotas. ¿Cuál sería el valor de cada cuota?

Una vez resuelto este problema, será interesante retomar con los alumnos cómo hacer para registrar los cálculos a medida que se van haciendo, para que se pueda reconstruir la serie de operaciones, encontrar errores, analizar decisiones, etc. Por ejemplo, los chicos podrían escribir:

656 - 128 = 528   528 - 234 = 294   294 : 6 = 49

También el docente podrá promover el análisis, por ejemplo, de si es posible seguir una serie de cálculos diferentes:

128 + 234 = 352   528 - 352 = 294   294 : 6 = 49

Así, en cada problema que los chicos resuelvan con calculadora podrán centrar la atención en la organización de los cálculos sucesivos y en la posibilidad de alterar o no el orden de la serie de cálculos. Por ejemplo:

- Juan quiere comprarse un lavarropas en 6 cuotas de $123 y un televisor en 8 cuotas de $132. Piensa que el año siguiente podrá ganar 1 500 pesos adicionales que le permitirán afrontar estos gastos. ¿Le alcanzarán para pagar todas las cuotas?

En esta situación los chicos podrán averiguar, en primer lugar, el valor de cada electrodoméstico; luego sumar esos importes y por último restar el total de gastos a 1 500. Otros chicos podrán realizar 1 500 - 123, 1 - 123 restando sucesivas veces y luego restar 132 ocho veces. Otros chicos podrán hacer 1 500 - 132 - 132, ..., hasta restar ocho veces, y luego restar 6 veces 123. Si les sobrara, se darían cuenta de que alcanza con los 1 500. Estas diversas alternativas de series de cálculos serán justamente el objeto de discusión luego de la resolución. Se propondrá que los chicos registren, incluso en sus carpetas, las distintas formas de organizar los pasos intermedios de resolución de este problema, de manera que sepan, cuando tengan que resolver otros nuevos, que seguramente también pueden tomar decisiones diferentes.

INVESTIGAR CÓMO FUNCIONAN DIFERENTES CALCULADORAS

Aprender a usar la calculadora también implica investigar sus límites. La calculadora común no “sabe” separar en términos, esto significa que va realizando las operaciones a medida que se introducen los números. Por ejemplo, una calculadora común resolvería $4 \times 5 + 6 \times 7$ de esta forma:

$4 \times 5 = 20$

$20 + 6 = 26$

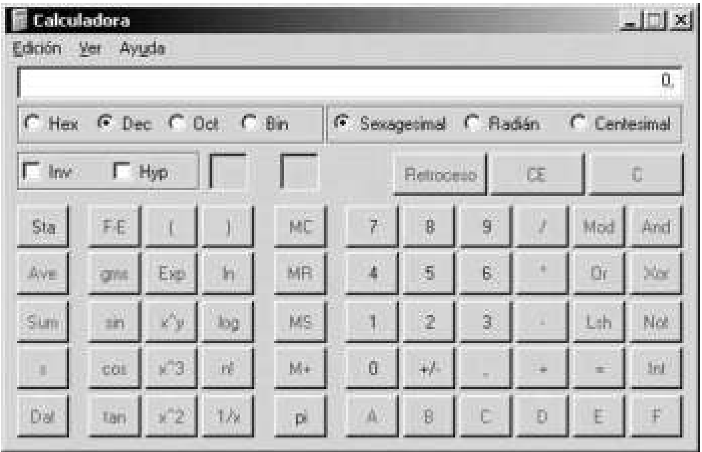
$26 \times 7 = 182$

En cambio, la calculadora científica, si se introdujeran los mismos números y operaciones, primero realizaría las multiplicaciones y luego las sumas.

Al anotar $4 \times 5 + 6 \times 7$, la calculadora científica haría $20 + 42 = 62$

Evidentemente, es necesario analizar con los alumnos que uno de los resultados es correcto y otro no, y que si queremos realizar las operaciones con la calculadora común deberemos recurrir a la tecla de memoria o bien anotar resultados parciales controlando nosotros la separación en términos, ya que el instrumento la desconoce.

Como los chicos no suelen tener calculadoras científicas, una posibilidad para explorar el funcionamiento comparativo de ambos tipos de calculadoras es recurrir a la calculadora científica de la PC.



Luego de haber explorado las diferencias entre calculadoras, se pueden proponer a los chicos los siguientes problemas:

- ¿Qué resultados obtendrías con ambas calculadoras?

3 × 7 + 2 × 3 + 2 × 9
común:
científica:

2 × 9 + 2 x 10 + 3 × 5
común:
científica:

- Colocá los paréntesis tal como los "pondría" cada calculadora:

23 × 45 + 12 × 34
común:
científica:

13 + 3 × 4 + 8
común:
científica:

13 + 21 × 2 + 50 :10
común:
científica:

ACTIVIDADES PARA APRENDER A RECONSTRUIR EL RESTO CON LA CALCULADORA

Uno de los límites de la calculadora es que no "sabe" operar con números naturales exclusivamente. ¿Qué significa esto? Si introducimos en la calculadora 10 : 3, no obtendremos nada parecido a esta cuenta:

$$\begin{array}{r|l} 10 & \underline{3\quad\quad} \\ 1 & 1 \end{array}$$

La calculadora directamente divide “repartiendo” también el resto, o sea que opera con números decimales y no con naturales. ¿Qué problemas plantea este límite de la calculadora?

Por una parte, la calculadora directamente no permite corregir resultados obtenidos de una división. Por ejemplo, para saber si esta cuenta está bien o no, tendremos que hacer más de una operación:

$$\begin{array}{r|l} 2\,347 & \underline{5\quad\quad} \\ 2 & 469 \end{array}$$

ya que si lo hacemos en la calculadora, obtendremos 469,4. Por lo tanto, en la división con números naturales hecha con calculadora será necesario abordar con los chicos cómo hacer para reconstruir el resto. Luego que los chicos prueben realizando diferentes cálculos podrán llegar a la conclusión de que será necesario desestimar la parte decimal obtenida, borrar el número y volver a escribir el 469, multiplicarlo por 5 y, recién allí, restar ese resultado a 2 347. Si directamente restaran 2 347 al producto de 469 x 5, obtendrían el resto pero con signo negativo. Si quisieran obtener el 2, deberían nuevamente borrar y escribir la resta.

Además de poder corregir con autonomía sus cuentas de dividir, aprender a obtener el resto les será necesario para resolver una serie de problemas, como:

- En una fiesta escolar había 788 figuritas para repartir en partes iguales entre 9 grados. ¿Cuántas sobraron?

- En una fábrica hicieron 3 451 tornillos y quieren empaquetarlos de a 12. ¿Cuántos sobran? ¿Cuántos hacen falta para tener un paquete más?

- Juliana se mudará a otro país y por eso decidió regalar en partes iguales sus estampillas a sus seis mejores amigas, pero llevarse como recuerdo sólo las que sobraran. Tiene 1 345 estampillas, ¿cuántas se llevará?

LA CALCULADORA ES UNA HERRAMIENTA ÚTIL PARA EXPLORAR PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS Y DE LAS OPERACIONES

Numerosos problemas con la calculadora permiten plantear restricciones que "obligan" a descomponer los números de diversas formas. Ya se presentaron algunos ejemplos de problemas de cálculo que exigen analizar la validez o invalidez de ciertas descomposiciones (ver Actividades para usar y estudiar propiedades de las operaciones).

Otros problemas apuntan a analizar las descomposiciones posibles en relación con el uso de la propiedad asociativa de la multiplicación. Por ejemplo:

- En una calculadora se marcó 122 × 120, pero se cometió un error ya que, en realidad, se quería multiplicar por 60. ¿Cómo corregirlo sin borrar lo que ya está?

- Juan tecleó 3 425 × 150, pero quería multiplicar por 50 y se confundió, ¿cómo corregirlo sin borrar?

- Analía anotó en su calculadora 2 235 × 120, pero luego se dio cuenta de que tenía que multiplicar por 360, ¿cómo puede seguir sin borrar?

Y en la división:

- Gabriel quería hacer 3 636 : 12 y anotó 3 636 : 2, ¿cómo puede seguir?

- Alicia, en cambio, para el mismo cálculo se confundió y puso 3 636 : 3. ¿Puede seguir sin borrar y con otra división?

- Osvaldo quiso hacer la misma cuenta, pero se distrajo y escribió 3 636 : 10. Él dice que si ahora divide por 2, le da lo mismo, ¿tiene razón?

Este conjunto de problemas apunta a analizar qué descomposiciones son posibles y cuáles no para dividir por 12. Muchos chicos utilizarán la propiedad distributiva y pensarán que dividir por 12 equivale a hacerlo por 10 y luego por 2; el análisis de esa situación y de otros ejemplos permitirá comprender que dividir por 10 y luego por 2 es igual que dividir por 20 y no por 12, y que si se quiere dividir por 12, es posible dividir por 3 y luego por 4, o por 4 y luego por 3, o bien por 2 y luego por 6 o por 6 y luego por 2, descomponiendo el 12 en factores.

Luego se pueden plantear problemas para reutilizar lo aprendido con esa situación. Por ejemplo:

- Completá la tabla y luego controlá tus anticipaciones con la calculadora.

Número en el visor de la calculadora	**Se quiere dividir por:**	**Se pueden hacer estos dos cálculos**	**No se pueden hacer estos dos cálculos**	**Anoto si estaba bien o no**
4 480	20			
666 666	6			
6 666 666	12			
31 392	48			
		Dividir por 4 y luego por 6		
		Dividir por 3 y luego por 8		

Otros problemas apuntan a poner en juego la multiplicación y la división por la unidad seguida de ceros, por ejemplo:

- En una calculadora se marcó 1 322 × 100, pero se cometió un error, ya que se quería multiplicar por 10, ¿cómo corregirlo sin borrar lo que ya está?
- Martín marcó 2 222 × 1 000, pero quería multiplicar por 100 y se confundió, ¿cómo corregirlo sin borrar?
- Javier anotó en su calculadora 4 535 × 2 000, pero luego se dio cuenta de que tenía que multiplicar por 200, ¿cómo puede seguir sin borrar?

Estos otros problemas pueden presentarse con la intención de que los chicos puedan explorar qué sucede con las operaciones llamadas inversas o con los conjuntos de cálculos en los que se vuelve al punto de partida.

Por ejemplo:

- Escribí un número de cuatro cifras en la calculadora. Restale cuatro números diferentes y luego sumale cuatro números distintos de los anteriores. Tenés que tratar de que luego de los 8 cálculos te quede el mismo número que al principio. No te olvides de anotar en la carpeta los cálculos que vas haciendo en la calculadora.

- Inventá un juego de seis pasos en la calculadora, que te permita adivinar qué número escribió un compañero en el visor. Por ejemplo: "Anotá un número de dos cifras, restale 5, sumale 10, restale 6, sumale 1, multiplicá por 4, dividí por 2, etc. ¿Cuál te quedó? Entonces elegiste el número...".

(En este último caso habrá que dividir por 2 el número que le quedó al compañero para "adivinar" el original).

En estos problemas el trabajo consiste en analizar con los alumnos qué reglas hay que seguir. Por un lado, los alumnos encontrarán con facilidad qué se puede y qué no respecto de la suma y la resta; luego será necesario analizar qué sucede con la división. Una restricción es el problema de dividir y que no quede resto. La otra cuestión a trabajar está ligada con la jerarquía de las operaciones: ¿se puede dividir primero y sumar luego?, ¿es necesario hacer todas las sumas y restas al principio, y al final las multiplicaciones y divisiones?, ¿y si se hacen todas sumas y restas, y una multiplicación sola al final, y luego dividimos para averiguar? Construir esta serie de cálculos en torno de un juego de adivinación del número permitirá trabajar sobre operaciones equivalentes, orden de las operaciones, términos, escrituras matemáticas, uso de paréntesis, etcétera.

Problemas con calculadora que exigen analizar descomposiciones de los números

Antes hemos sugerido ejemplos de cómo anticipar los cálculos que hay que hacer para realizar una operación con la restricción de no utilizar cierta tecla, lo que provoca la necesidad de descomponer el número en cuestión.

Ejemplos de problemas que exigen analizar el valor posicional de una o más cifras:

- Hacer en la calculadora 2 345 + 8 365 sin usar la tecla del 3.
  En este caso se trata de determinar cuál es el valor del 3, identificar que se trata de 300 y descomponerlo, haciendo, por ejemplo, 2 045 + 100 + 100 + 100 + 8 065 + 100 + 100 + 100, entre otras descomposiciones posibles.

- Hacer en la calculadora 7 896 - 3 245 sin apretar las teclas del 2 ni del 3.
  De nuevo en este caso será necesario descomponer 3 245, por ejemplo, en 1 000, 1 000, 1 000, 100, 100 y 45, e ir restando sucesivamente.

- Escribir en la calculadora el número 4 567 y con una sola operación convertirlo en 4 507. ¿Y cómo convertir 4 567 en 4 067? ¿Y en 4 007?
  Este problema exige analizar que en un caso es preciso restar 60 para "quitar el 6", que en el siguiente hay que restar 500 y, por último, 560. Al principio los chicos restan 5 y van probando hasta que se dan cuenta de que ese 5 "vale" 500.

Otros problemas, un poco más complejos:

- Completá la tabla, sin usar la calculadora, y al final controlá que las cuentas te hayan salido bien.

Número en el visor	**Resta que haré**	**Se transforma en**	**Pruebo y anoto si dio bien**
34 598	- 4 000		
98 761		98 061	
98 761		90 001	
	- 800	6 097	
39 876 512	- 9 000 000		
913 245		900 005	
	4 590	3 000 007	

Al igual que en otros problemas, los chicos podrán resolver los cálculos que requiere este cuadro aunque no recuerden los nombres de los números. Será suficiente con analizar el valor de los números según la posición que ocupan.

CAPÍTULO IV

ENSEÑAR DIVERSOS ALGORITMOS (MÁS O MENOS CONVENCIONALES)

Lo desarrollado hasta aquí ha puesto en evidencia la diversidad de estrategias de cálculo mental que es interesante enseñar a los alumnos; con cierta sistematización ellas podrán convertirse progresivamente en herramientas de todos los chicos. Son tantas las situaciones en las cuales éstos pueden resolver cálculos –que involucran la reflexión y el análisis de los números y de las operaciones– que al parecer queda un espacio muy reducido para la enseñanza del cálculo convencional.

Sin duda los algoritmos han sido muy útiles y lo siguen siendo en muchas ocasiones. En el segundo ciclo los chicos podrán aprender no uno sino diversos algoritmos para cada operación. Pero para que comprendan su funcionamiento es preciso que dispongan ya de una gran cantidad de herramientas de cálculo mental, estimativo y con calculadora.

No se trata de oponer el cálculo reflexivo a los algoritmos convencionales; por el contrario, el cálculo mental, el cálculo estimativo y el cálculo con calculadora son herramientas útiles para comprender mejor los cálculos algorítmicos. Por otra parte, hemos planteado un trabajo de exploración y de reflexión, en torno de los diferentes tipos de cálculos, que también es posible formular en relación con los cálculos algorítmicos. O sea que también es posible considerarlos como objeto de estudio, para develar los fundamentos que ocultan, las propiedades en las que se basan y las descomposiciones que, a los ojos de quien no encuentra las razones, casi parecen operaciones encubiertas.

Los algoritmos convencionales son la versión más económica, veloz y fértil para cualquier número. Pero tanta economía producida durante siglos hoy parece, a los ojos de quien está aprendiendo, que escondiera las operaciones intermedias. Veamos un ejemplo de multiplicación por dos cifras. La cuenta convencional que se enseñaba en la escuela era:

$$
\begin{array}{rr}
 & 1\,1 \\
 & 2\,323 \\
\times & 24 \\
\hline
 & 9\,292 \\
+ & 4\,6\,46 \\
\hline
 & 55\,752
\end{array}
$$

en realidad este cálculo esconde que se está realizando:

$$
\begin{array}{rr}
 & 2\,323 \\
\times & 24 \\
\hline
 & 9\,292 \\
+ & 46\,460 \\
\hline
 & 55\,752
\end{array}
$$

Y que en realidad significa:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2\,323 & \\
\times & 24 & \\
\hline
 & 9\,292 & \mathbf{(2\,323 \times 4)} \\
+ & 46\,460 & \mathbf{(2\,323 \times 20)} \\
\hline
 & 55\,752 &
\end{array}
$$

dado que $2\,323 \times 24 = 2\,323 \times 4 + 2\,323 \times 20$, por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma.

Como en la suma puede utilizarse la propiedad conmutativa, también podría hacerse:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2\,323 & \\
\times & 24 & \\
\hline
 & 46\,460 & \mathbf{(2\,323 \times 20)} \\
+ & 9\,292 & \mathbf{(2\,323 \times 4)} \\
\hline
 & 55\,752 &
\end{array}
$$

Y, evidentemente, el mismo cálculo también podría hacerse así:

$$
\begin{array}{rrl}
 & 2\,323 & \\
\times & 24 & \\
\hline
 & 23\,230 & \mathbf{(2\,323 \times 10)} \\
+ & 23\,230 & \mathbf{(2\,323 \times 10)} \\
 & 9\,292 & \mathbf{(2\,323 \times 4)} \\
\hline
 & 55\,752 &
\end{array}
$$

Ahora bien, en algún momento fue muy importante "no perder tiempo" anotando el 0 en los cálculos que se estaban haciendo; pero hoy sabemos que si hay mucho apuro, la calculadora es más eficaz. Es interesante que los alumnos cuando hagan cálculos algorítmicos puedan registrar el sentido de los pasos intermedios que realizan, para perder lo menos posible el control de su cálculo y poder reconstruirlo en caso de error.

Se propone, entonces, abordar con los chicos la exploración de los diferentes algoritmos posibles, formas variadas de descomponer y registrar los pasos intermedios. ¿Cuál sería en la actualidad el inconveniente de que frente al mismo cálculo algunos chicos empezaran por multiplicar por 4 y otros por 20? ¿Cuál sería el inconveniente de que algunos alumnos escribieran al costado de cada multiplicación a cuál corresponde, para luego poder controlar los resultados parciales?

Sin duda el algoritmo que hoy conocemos es un modo económico de realizar cálculos. Pero inevitablemente va cayendo en progresivo desuso, dada la importancia creciente del cálculo estimativo, del cálculo mental y del cálculo con calculadora. Ahora bien, encontramos buenas razones para propiciar su uso reflexivo, en el cual los alumnos puedan registrar por sus propios medios diferentes "marcas" que les permitan tomar conciencia de que están apoyándose en propiedades de los números (24 puede pensarse como 20 + 4) y de las operaciones (multiplicar por 24 es igual que multiplicar por 20 y por 4, y sumar los resultados). Por ello sugerimos que en el aula convivan diferentes escrituras para el mismo cálculo, que los alumnos puedan escribir el cero en la multiplicación de varias cifras, para no olvidar cuál es el producto de una multiplicación parcial de dos números, que puedan escribir entre paréntesis qué multiplicaciones parciales realizan, que sepan que pueden descomponer de formas variadas, etcétera.

En el caso del algoritmo de división por dos cifras, en el convencional, enseñado durante años, el ocultamiento de los pasos intermedios es aun mayor:

```
13 609 | 24
       |-------
1  60     567
   169
     1
```

En esta cuenta cualquier adulto podrá reconocer una organización gráfica y oral estricta que siempre acompaña al cálculo de la división: "Tomo el 13", "no le está", "tomo el 136", "a cuánto le está", "pongo el 5", "5 por 4, 20, pongo el 0 y llevo el 2", "5 por 2, 10 y 2 que me llevé, 12, al 13, 1", "bajo el 0" y sigue la cuenta.

Pero, ¿qué es tomar?, ¿a dónde se bajan los números?, ¿qué significa que no "le está"?, ¿qué operaciones matemáticas son?, ¿por qué están ocultas bajo unas frases en las que no se evidencia que no se trata de otra cosa que de multiplicar, restar y sumar?

Veamos la misma cuenta más desplegada, en la que se muestran las restas. Ya desaparecen entonces de la serie repetida de oraciones "a cuánto le está". Escribir la resta permite tener un mayor control de lo que se está haciendo.

```
  13 609 | 24
-  12 0  |_____
  ----     567
    160
  - 144
  -----
     169
   - 168
   -----
       1
      /
```

Sin embargo, ese 136, ese 0 o ese 9 no son números aislados. Para los docentes puede ser obvio que se trata de centenas, decenas y unidades. Los 120 y el 16 que sobran son centenas, el 144 y el 16 que vuelven a sobrar son decenas, mientras que el 9 que se "baja" y el 168 son unidades.

```
 13 609            | 24
-12 0  (centenas)  |_____
 ----                567
   1 60
  -1 44  (decenas)
  -----
     169
    -168  (unidades)
    ----
       1
      /
```

Sin embargo, esto no es nada evidente para los chicos. Numerosos estudios han permitido analizar cómo les es más sencillo operar si mantienen el valor completo del número en cuestión.

Por ejemplo:

$$
\begin{array}{r|l}
13\,609 & 24 \\ \cline{2-2}
-\;12\,000 & 5\quad 6\quad 7 \\ \cline{1-1}
1\,609 & \text{centenas}\;\;\text{decenas}\;\;\text{unidades} \\
-\;1\,440 & \\ \cline{1-1}
169 & \\
-\;168 & \\ \cline{1-1}
1 & \\
/ &
\end{array}
$$

En realidad el 5 también representa centenas; el 6, decenas, y el 7, unidades. Si escribiéramos las multiplicaciones, las restas y los números completos, quedaría el siguiente algoritmo[1]:

$$
\begin{array}{rcl|l}
13\;609 & & & 24 \\ \cline{4-4}
-\;12\;000 & \xleftarrow{\;500\times 24\;} & & 500 \\ \cline{1-1}
1\,609 & & & 60 \\
-\;1\,440 & \xleftarrow{\;60\times 24\;} & & 7 \\ \cline{1-1}
169 & & & \\
-\;168 & \xleftarrow{\;7\times 24\;} & & \\ \cline{1-1}
1 & & & \\
/ & & &
\end{array}
$$

Aunque a los ojos de quien ya sabe dividir éste parezca más complejo, está suficientemente estudiado y probado, en gran cantidad de aulas, que para los chicos es más sencillo. Ello se debe a que les permite saber qué operaciones están llevando a cabo, no necesitan “decir” un discurso reiterado, sino hacer cálculos, y es posible controlar qué cuentas intermedias se están haciendo. Es, sin duda, un trabajo matemático y no mecánico, y como tal permite tomar decisiones, controlar, operar, etcétera.

Será interesante mostrar a los chicos diversos algoritmos en los que se presenten los cálculos intermedios, de manera que puedan tomar decisiones respecto de cuáles cálculos escribir y cuáles no.

1. Brousseau produjo ese algoritmo más desplegado a partir de diversos trabajos de investigación y hoy está presente en numerosos documentos curriculares y libros de texto.

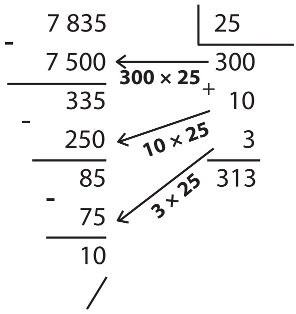
Desde el inicio del estudio de los algoritmos esto significará comunicar a los alumnos que la humanidad ha encontrado diversas formas de resolver esos cálculos; ellos estudiarán algunas y luego podrán usar diversas, según el tipo de cálculos a resolver y el dominio que tengan del cálculo mental.

Veamos otras cuentas, resueltas por diversos algoritmos en los que cada vez se muestran más los cálculos intermedios:

```
4 638 | 6            7 835 | 25
  43    773            33    313
   18                   85
    0                   10
```

```
  4 638 | 6            7 835 | 25
- 42      7 7 3      -  75     313
  ---     c d u        ----
   43                   33
-  42                -  25
   ---                 ----
    18                   85
-   18                -  75
   ---                   ---
     0                   10
```

```
  4 638           | 6              7 835 | 25
- 4 200  <- 700 × 6  700         - 7 500   3 1 3
  -----            + 70            -----   c d u
    438                3             335
-   420  <- 70 × 6   ---         -   250
    ---              773             ---
     18                               85
-    18  <- 3 × 6                -    75
    ---                              ---
      0                               10
```



Se promueve que aquellos chicos que tienen más dificultades para organizarse escriban los pasos intermedios. Su registro escrito les permitirá controlar lo que hacen, reconstruirlo, y, si se equivocan, volver a empezar desde un lugar más avanzado que el inicio del cálculo.

Aquello que es más fácil para los chicos es lo que está menos oculto, más transparente. La transparencia ayuda a la comprensión y el control.

Incluso se les puede proponer a los chicos problemas como los siguientes:

- Acortá la primera cuenta para que te quede en menos pasos en la segunda:

```
  1 608    | 5
- 500    <- 100     100 × 5
  1 108   +100
- 500    <- 100     100 × 5
  608      100
- 500    <- 100     100 × 5
  108       10
- 50     <- 10      10 × 5
  58        10
- 50     <- 10      10 × 5
  8          1
- 5      <- 1       1 × 5
  3        321
```

```
  1 608    | 5
- 1 500  <- [ ]
  108      + [ ]
- 100    <- [ ]
  8
- 5      <-
  3
```

- Escribí qué multiplicaciones se están haciendo en cada paso:

```
  2 359    | 22
- 2 200  <- 100
  159     + 7
- 154    <- 107
  5
```

- Uní con flechas, en ambas cuentas, dónde están los mismos pasos tanto del lado del cociente como del lado del dividendo:

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 3\,756 & 16 \\ \cline{3-3}
- & 3\,200 & 200 \\ \cline{2-2}
 & 556 & +\ 30 \\
- & 480 & 4 \\ \cline{2-3}
 & 76 & 234 \\
- & 64 & \\ \cline{2-2}
 & 12 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rr|r}
 & 3\,756 & 16 \\ \cline{3-3}
- & 1\,600 & 100 \\ \cline{2-2}
 & 2\,156 & 100 \\
- & 1\,600 & 10 \\ \cline{2-2}
 & 556 & +\ 10 \\
- & 160 & 10 \\ \cline{2-2}
 & 396 & 4 \\ \cline{3-3}
- & 160 & 234 \\ \cline{2-2}
 & 236 & \\
- & 160 & \\ \cline{2-2}
 & 76 & \\
- & 64 & \\ \cline{2-2}
 & 12 &
\end{array}
$$

También es interesante enseñar a los chicos a estimar siempre el resultado de un cálculo. Esto implicará que cada vez que hagan una cuenta se les exija por un tiempo que primero hagan la estimación, luego el cálculo y al final controlen con la calculadora el resultado obtenido.

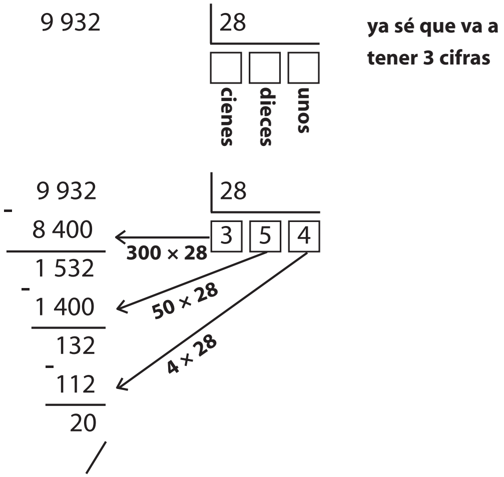
Por ejemplo, para estimar el cociente podrán realizar algo similar a:

$$
\begin{array}{r|l}
9\,932 & 28 \\ \cline{2-2}
\end{array}
$$

a) Estimar el cociente.
¿Podrá ser 10?; $28 \times 10 = 280$, es muy poco.
¿Podrá ser 100?; $28 \times 100 = 2\,800$, es muy poco.
¿Podrá ser 1 000?; $28 \times 1\,000 = 28\,000$, me pasé.

Conclusión:
El cociente es mayor que 100 y menor que 1 000; está entre 100 y 999. Tiene 3 cifras.

b) Hacer la cuenta dejando ya lugar para las cifras del cociente:



Luego de cada cálculo, la comparación de formas de resolución permitirá tomar conciencia de que hay diferentes maneras de calcular, además genera un espacio propicio para apropiarse de procedimientos usados por otros compañeros, más desplegados para aquellos chicos que precisan controlar paso por paso lo que van haciendo, como también estrategias más avanzadas y económicas a medida que se adquiere confianza en la resolución de los cálculos intermedios.

Algunas actividades podrían ser:

- Juliana dice que en las cuentas de multiplicar se puede empezar por las unidades o por las decenas. ¿Qué pensás?

- Dos chicas hicieron estas dos cuentas para resolver el mismo cálculo, ¿están bien las dos?

Malena

	3 389	14
-	2 800	242
	589	↓
-	560	
	29	**?**
-	28	
	1	

Laura

	3 389		14
-	1 400		100
	1 989		100
-	1 400		10
	589	+	10
-	140		10
	449		10
-	140		2
	309		
-	140		
	169		
-	140		
	29		
-	28		
	1		

- ¿ Dónde está el 4 de Malena en la estrategia de Laura?

- Martín y José hicieron así la misma cuenta. Uní con flechas dónde están los mismos números de cada uno.

Martín

3 389	14
58	242
29	
1	

José

	3 389		14
-	2 800		200
	589	+	40
-	560		2
	29		242
-	28		
	1		

- ¿Te animás a acortar esta cuenta? ¿Cómo quedaría?

5 390	23
− 2 300	100
3 090	100
− 2 300	10
790	10
− 230	+ 10
560	1
− 230	1
330	1
− 230	1
100	234
− 23	
77	
− 23	
54	
− 23	
31	
− 23	
8	

- Escribí en esta cuenta las restas que faltan:

4 729	33
142	143
109	
10	

- Escribí en esta cuenta qué multiplicaciones se hicieron en cada renglón:

```
   4 729     | 33
-  3 300     | 100
   1 429     | + 40
-  1 320     |   3
     109     | 143
-     99
      10
```

En síntesis, el estudio de los algoritmos es también una buena ocasión para estudiar las propiedades de las operaciones. No sólo se trata de que los chicos hagan cuentas, sino que también:

- opinen sobre cuentas hechas por sus compañeros,
- analicen la información que tienen respecto del resultado antes de hacerlas,
- comparen formas de resolución,
- discutan qué conviene y qué no conviene escribir en cada cálculo,
- se apropien de estrategias de cálculo hechas por otros,
- escriban de diferente manera los pasos intermedios,
- elaboren sus propias explicaciones verbales acordes con los pasos que hacen,
- tomen conciencia de que en diferentes épocas los algoritmos fueron cambiando,

- se informen de que, en el presente, en otros países los mismos cálculos se escriben de manera diferente.

El cálculo algorítmico permite igualmente tomar decisiones. Es importante sostener una heterogeneidad de estrategias en la misma clase. Los alumnos irán explorando en forma progresiva maneras diferentes de hacer las mismas cuentas y apropiándose de modalidades cada vez más económicas. Igualmente en la actualidad no parece necesario llegar a un algoritmo que oculte toda la información. Reiteramos que, desde esta perspectiva, se prioriza la reflexión y el trabajo matemático a la velocidad, innecesaria en tiempos de calculadoras y computadoras.

CAPÍTULO V

ENSEÑAR A ELEGIR LA ESTRATEGIA MÁS CONVENIENTE SEGÚN EL CÁLCULO O EL PROBLEMA A RESOLVER

Hemos fundamentado la importancia de enseñar una gran diversidad de estrategias de cálculo. Se espera que los chicos adquieran cada vez más autonomía para decidirse por cuál utilizar en cada situación.

Para que los chicos aprendan a tomar decisiones y analizar cuándo conviene una u otra estrategia, deben disponer de diversos conocimientos. Por un lado, dominar diferentes formas de resolver cálculos y, por otro, reflexionar sobre cuál es más conveniente en cada caso.

Para ello proponemos actividades que les ayuden a tomar conciencia de la mayor o menor pertinencia de una u otra modalidad de cálculo.

ACTIVIDADES PARA ANALIZAR QUÉ ESTRATEGIA ES MÁS CONVENIENTE

- En cada fila hay tres cálculos. Escribí debajo de cada uno si te conviene hacerlo mentalmente, con una cuenta o con calculadora. (Tenés que elegir en cada fila uno para cada estrategia).

9 000 + 90 000	98 976 + 99 718	9 124 + 237
....	....	....
781 234 + 87 564	77 000 + 777	12 000 + 12 000
....	....	....
5 991 - 546	300 958 - 958	2 398 765 - 830 976
....	....	....

98 876 - 12 345	1 999 999 - 999 999	125 560 -150
....	....	....
8 000 × 30	8 987 ×	8 976 × 12
....	....	....
100 000 × 3	788 × 5	78 787 × 78
....	....	....
99 999 : 9	99 999 : 999	9 999 : 11
....	....	....
8 646 : 22	7 700 : 7	89 786 : 47
....	....	....

Como el lector habrá advertido, los números se seleccionaron con la intención de favorecer el cálculo mental en un caso, el cálculo algorítmico en otro y el uso de la calculadora en otro.

Otras actividades apuntan a que los alumnos aprendan a elegir el procedimiento más adecuado para hacer ciertos cálculos necesarios para resolver problemas:

- En estos problemas ¿qué estrategia de cálculo elegirías?
  Mentalmente
  Con cuenta convencional
  Aproximado
  Con calculadora

- La familia de Lucía decide irse de vacaciones por una semana a la playa. Son dos adultos y tres chicos. Averiguan que cada pasaje cuesta $ 50 por persona, que el hotel sale $ 40 por día y por persona los grandes, y $ 30 los chicos, y calculan que en comida gastarán entre todos $ 50 por día. Tienen previsto llevar $ 220 adicionales para paseos ¿Con cuánto dinero deben contar para poder irse?

- Un señor quiere comprarse una computadora que cuesta $ 1 238. Decide ahorrar durante un año 100 pesos por mes, ¿le alcanza?

- José cobra en su trabajo de todo el día $ 867 pesos por mes. Le ofrecen dos trabajos, uno a la mañana, por $ 422, y otro a la tarde, por $ 507. Decide ir a su casa y hacer cuentas para evaluar si le conviene seguir con el que tiene o cambiar. ¿Qué pensás vos?

- Analía cobró $ 500 de aguinaldo y decide pagar todas sus deudas acumuladas de los últimos días. Pagar a su hermana los $ 342 que le debe; también quiere pagar la cuenta de luz, de $ 54; las expensas de su edificio, de $ 99; los $ 47 de la cuenta de gas, que casi se vence, y los $ 127 que le prestó su amiga hace dos meses. ¿Le alcanza con el aguinaldo?

Actividades para analizar cuándo conviene usar la calculadora

- ¿Cuáles de estos cálculos hacés más rápido que la calculadora? Se juega de a parejas. Uno hace los cálculos mentalmente, el otro con calculadora y anotan quién los hace más rápido. Ambos tienen la misma tabla, un chico completa la segunda columna y el otro la tercera. Al finalizar el cálculo, en la cuarta columna anotan quién lo hizo más rápido.

Cálculo a realizar	Resultado obtenido mentalmente	Resultado obtenido con la calculadora	¿Qué estrategia fue más veloz?
456 × 12			
456 × 100			
456 × 100 000			
8 888 : 8			
9 999 : 3			
40 000 : 2			
4 444 × 2			
5 672 × 7			

El objetivo de esta actividad es poder analizar después, en forma colectiva, en qué casos es conveniente usar la calculadora y en cuáles no lo es tanto, ya que el dominio del cálculo mental permite mayor velocidad.

PALABRAS FINALES

A lo largo de este material hemos intentado desplegar ciertas ideas, que a modo de cierre se expondrán en forma sintética.

Una cuestión central que subyace a todas las propuestas es la convicción de que el cálculo puede ser un trabajo reflexivo. Por ello, lejos de asociarse con prácticas escolares mecánicas y rutinarias, se lo puede considerar como una "vía regia" para instalar prácticas de exploración, debate y justificación.

La enseñanza del cálculo, además de tener valor en sí misma, dada su fertilidad para resolver gran variedad de problemas y por ser necesaria para aprendizajes matemáticos futuros, puede ser un medio para enseñar en forma simultánea ciertas prácticas matemáticas: "Qué se puede", "qué no se puede", el valor del ejemplo y del contraejemplo, la búsqueda y explicación de regularidades, la generalización (esto que sucede con estos números ¿pasará siempre o no?, ¿siempre dará lo mismo?, ¿nunca se podrá descomponer así? ¿de qué otras formas dará igual?). O sea que se apuesta al enorme valor formativo que tienen los conocimientos sobre el cálculo cuando son producidos en un clima de investigación y debate.

Otra cuestión –sin duda también una convicción apoyada en la experiencia de trabajo en las aulas– es que si bien es necesario reconocer en los chicos diferencias en sus habilidades para calcular y en el placer que ello les produce, la enseñanza puede organizarse para que todos aprendan estrategias específicas de cálculo. Es cierto que en todas las clases algunos chicos elaboran conocimientos en forma más espontánea o intuitiva. Por ejemplo, tienden a estimar cuánto dará una cuenta, a controlar si el resultado obtenido es posible, a probar con otra estrategia si no les sale un cálculo, a investigar con números pequeños y más ejemplos si algo es válido o no. Ahora bien, sabemos que todos esos conocimientos pueden enseñarse para que sean aprendidos por todos los alumnos de una clase.

Hemos insistido en que en todos los tipos de cálculo es importante dar un tiempo para la exploración individual y luego un espacio posterior, para difusión y análisis de formas de resolver, como también ofrecer problemas similares para reutilizar lo aprendido. Esto implica que aquello que al principio es novedoso, a lo largo de varias clases se convierte en conocido por todos. Para ello es necesario asegurar un tiempo de trabajo continuo con el mismo tipo de cálculo. Hoy sabemos que todas aquellas prácticas en las que cada ejercicio es totalmente diferente al anterior no permiten que todos los chicos adquieran estrategias que no se les hayan ocurrido. Se convierten simplemente en ejercicios para evaluar a quien ya sabe. Por el contrario, valoramos una enseñanza intencional, específica para cada clase de cálculo, y en la cual haya tiempos para investigar, compartir relaciones encontradas, volver a aprender, practicar y reutilizar.

Para realizar un trabajo de exploración intensivo de las diversas estrategias de cálculo y, para que los alumnos puedan validar por sus propios medios sus anticipaciones y decisiones, es absolutamente imprescindible el uso cotidiano de la calculadora. Lejos de resolver los problemas a los chicos, hoy es una herramienta necesaria para resolver problemas, controlar resultados, analizar descomposiciones posibles, e investigar el valor de los números, la jerarquía de las operaciones, etc. Sin duda es un instrumento fértil para plantear una gran variedad de problemas que presentan nuevos desafíos a los alumnos.

La cuestión ya mencionada de la intencionalidad supone que el docente prepara un conjunto de clases alrededor de un conocimiento que pretende que los alumnos adquieran. Las clases se organizan en torno de la difusión de los descubrimientos de los chicos. Pero la mayoría de estos descubrimientos no es azarosa ni imprevista. Las actividades se seleccionaron con la intención de provocar la aparición, el uso y la explicitación ulterior de las herramientas nuevas.

Para todo ello es central el debate, la difusión de las buenas ideas, el análisis colectivo de los errores, el registro de los nuevos progresos, el tiempo para sistematizar una estrategia nueva, el análisis de los diferentes procedimientos posibles. Constantemente el trabajo matemático es atravesado por las siguientes preguntas: ¿se puede hacer de otro modo?, ¿es válida esta forma de hacerlo? ¿se podría también hacer así?, ¿por qué no da lo mismo si lo hacemos así?, ¿esta otra forma da igual por casualidad?, ¿esta estrategia sirve con otros números?, ¿dará siempre?, ¿hay algún caso en que no dé?, ¿por qué funcionará?, ¿por qué no? Las preguntas respecto de cómo se construye algo nuevo en matemática atraviesan el clima de la clase que se intenta comunicar con estas propuestas.

El trabajo del aula también está regido por otras intervenciones del docente que intentan garantizar mejores condiciones para el aprendizaje de todos los chicos: "Vamos a mostrar las formas que encontraron de resolverlo"; "a algunos no les dio igual, vamos a analizar en qué se equivocaron"; "anotemos esta conclusión para que nos sirva otro día"; "esta propiedad se llama así y la vamos a seguir estudiando"; "probar con números más pequeños puede ser útil para establecer si sirve o no"; "anotemos estos resultados, ya que los vamos a seguir usando"; "saber antes cuánto va a dar es útil para no equivocarse tanto"; "a veces conviene hacerlo mentalmente, que es más rápido que con la calculadora"; etcétera.

Sin duda estamos revalorizando la potencia del cálculo para el trabajo matemático. El contenido es central en las propuestas realizadas. Simultáneamente, hay una fuerte convicción de la intencionalidad del docente. Es él quien selecciona las actividades, anticipa estrategias, elige cuáles difundir, pone nombre a los nuevos conocimientos, escribe lo que los alumnos deben retener, organiza la reutilización, vuelve a enseñar si algo no se aprendió, exige qué se debe memorizar, muestra los avances y cambios, decide en qué momento de la clase se usa la calculadora, cuándo es tarea individual, cuándo en parejas y en qué momento es colectiva. Tiene a su cargo la responsabilidad en la gestión de una producción colectiva.

La enseñanza sistemática de una gran diversidad de estrategias de cálculo puede generar aprendizajes más significativos y duraderos. Además, tal vez podamos lograr que muchos más chicos disfruten cada vez más el placer de probar "qué funciona y qué no" con los números y los cálculos, con una mirada menos mágica y más matemática.

BIBLIOGRAFÍA

- Broitman C. (1999). La Enseñanza de las Operaciones en el Primer Ciclo. Editorial Novedades Educativas, Bs. As.
- Carraher T, Carraher D y Schliemann A. (1991). En la vida diez, en la escuela cero. México, Siglo XXI
- Chemello G. (1997). El cálculo en la escuela: las cuentas, ¿son un problema? En: Los CBC y la Enseñanza de la Matemática, laies, G. (comp.). Ed. A-Z.
- Dirección de Currícula (1999). Pre Diseño. Marco General EGB. Secretaría de Educación. Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Dirección de Currícula (2003-2004). Grado de Aceleración 4°/5°. Material para el alumno y material para el docente. Proyecto Conformación de Grados de Aceleración. Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Dirección de Currícula (2004). Grado de Aceleración 6°/7°. Material para el alumno y material para el docente. Proyecto Conformación de Grados de Aceleración. Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Dirección de Currículum GCBA (1999). Pre Diseño Curricular del Segundo Ciclo. Matemática. La enseñanza de las operaciones. Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Dirección de Currículum MCBA (1997). Documento Curricular Número 4. Matemática. Secretaría de Educación del Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Bs. As. (2001). Orientaciones Didácticas para la Enseñanza de la División en los tres ciclos de la EGB.

- Dirección General de Educación Básica. Pcia. de Bs. As. (2001). Orientaciones Didácticas para el uso de la calculadora en los tres ciclos de la EGB.
- Ferreiro E. (1986). El cálculo escolar y el cálculo con dinero en situación inflacionaria. En: Proceso de alfabetización. La alfabetización en proceso. Bs. As.
- Fregona D. (1997). El libro de la Matemática 7. Libro del Docente. Editorial Estrada.
- Lerner D. (1992). La matemática en la escuela aquí y ahora, Buenos Aires, Aique.
- Lerner D. (1996). La enseñanza y el aprendizaje escolar. En: Castorina, Ferreiro, Lerner, Oliveira. "Piaget-Vigotsky: contribuciones para plantear el debate". Ed. Paidós. Bs. As.
- Panizza M. (comp.), 2003. Enseñar matemática en el Nivel Inicial y primer ciclo de EGB: Análisis y Propuestas. Ed. Paidós, Bs. As.
- Parra C (1994). Cálculo mental en la escuela primaria. En Parra y Saiz (comp.): Didáctica de Matemática. Ed. Paidós, Bs. As.
- Parra C (1997). Las poderosas reflexiones de los chicos y el trabajo docente. En: Los CBC y la Enseñanza de la Matemática, Iaies, G. (comp.). Ed. AZ.
- Saiz I (1994). La dificultad de dividir o dividir con dificultad. En: Parra y Saiz, Didáctica de Matemática. Ed. Paidós, Bs. As.
- Vergnaud G (1991). El niño, las matemáticas y la realidad, problema de las matemáticas en la escuela. Ed Trillas, Méjico.

SANTILLANA

Claudia Broitman es Profesora de Enseñanza Primaria y Licenciada en Ciencias de la Educación (UBA).

Actualmente se desempeña como Profesora Titular de Didáctica de la Matemática en la Universidad Nacional de La Plata, miembro del equipo de Matemática de la Dirección de Currícula y Enseñanza y de la Escuela de Capacitación Docente del Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires y profesora en Institutos de formación docente. Es coautora del área de matemática de los Diseños Curriculares de Educación Primaria y de documentos de actualización didáctica de la Ciudad de Buenos Aires y de la Provincia de Buenos Aires, así como del Diseño Curricular de Formación Docente de la Ciudad de Buenos Aires. Es autora de artículos y libros para docentes de educación inicial y primaria y libros de texto. Ha investigado sobre el aprendizaje y la enseñanza del sistema de numeración y actualmente investiga sobre las matemáticas de adultos que inician la escolaridad primaria.

2008978

ISBN 978-950-46-2518-6

9789504625186