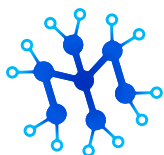


Actividades modélicas

Geometría y Medida

1º AÑO

Autor: Sergio/Damián Viñolo



MENDOZA MEJORA
APRENDIENDO
MATEMÁTICA



Aprendizaje

“Análisis de construcciones con regla no graduada y compás o software matemático adecuado, acudiendo a argumentos basados en propiedades de las figuras puestas en juego.”

Indicadores de avance:

- Hace uso de regla no graduada y compás, para realizar construcciones geométricas (trazado de rectas paralelas y perpendiculares, circunferencias, construcción de ángulos, construcción de puntos medios de segmentos, trazado de mediatrices y bisectrices), justificando cada paso con las propiedades geométricas involucradas.
- Construye triángulos con instrumentos clásicos de geometría y software matemático, a partir de segmentos y ángulos dados.
- Interpreta propiedades de los lados y ángulos en un triángulo, validando desde las construcciones geométricas.
- Analiza la existencia y unicidad de construcciones de triángulos a partir de datos dados, reconociendo propiedades de esta figura geométrica.



ACTIVIDAD 1

Explorar, construir y comprobar

1. “¿Dónde ubicar el refugio?”

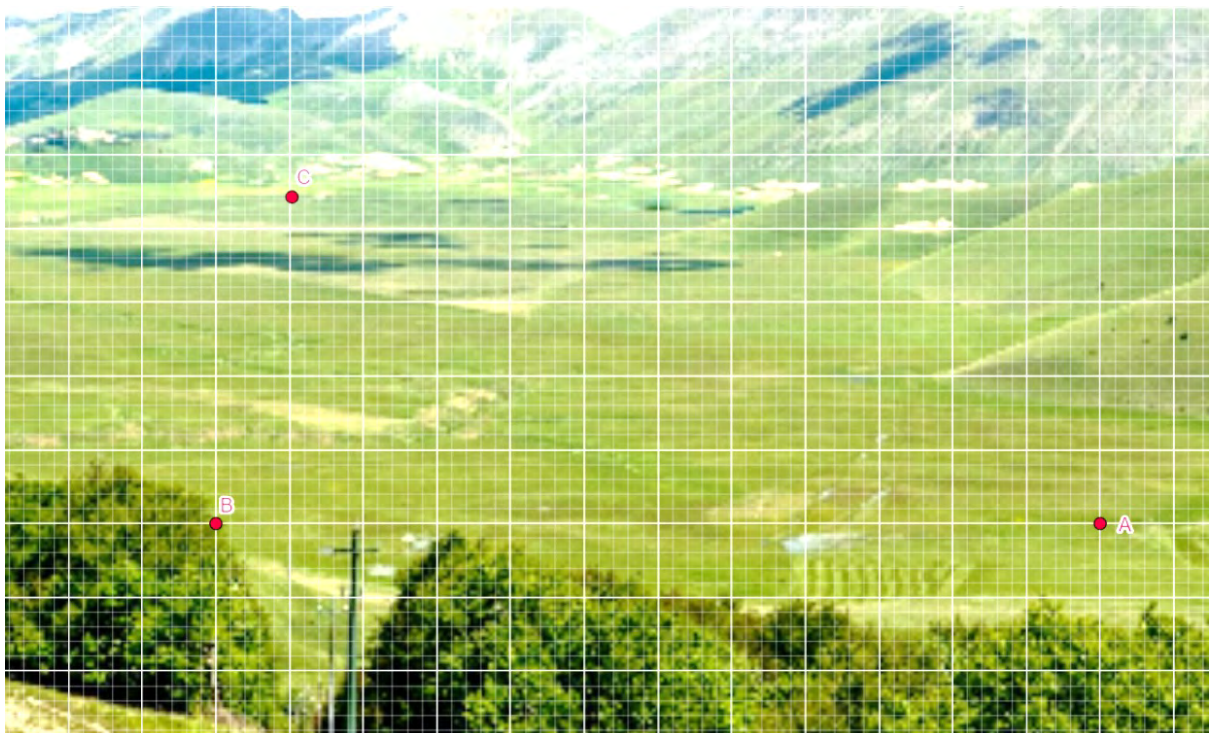
En una reserva natural, se han instalado tres puestos de monitoreo (A, B y C) distribuidos en distintos puntos de una región plana. Para facilitar la comunicación en caso de emergencia, se necesita construir un refugio que esté ubicado a la misma distancia de los tres puestos.

a | ¿Cómo podrías determinar ese lugar?

Podés usar construcciones en papel o herramientas digitales como GeoGebra para explorar posibles ubicaciones.

Preguntas orientadoras para tu investigación

- Si quisieras hallar una ubicación del refugio, pero con la única condición de que esté a igual distancia de dos puestos de monitoreo, por ejemplo, del A y B, ¿cómo podrías determinar su ubicación? ¿Ese punto es único?
- ¿Qué sucede si buscás un punto que esté a igual distancia de otro par de puestos, por ejemplo, el A y C?
- ¿Existe un punto que esté a igual distancia de los tres? Si existe, ¿es único?





Para seguir pensando...

b | ¿Cómo podés justificar que el punto que encontraste está realmente a igual distancia de los tres puestos?

¿Qué ocurre con la ubicación del refugio al modificar la ubicación de los puestos de monitoreo? Mostrá algunas nuevas configuraciones.



(Podés hacer uso del siguiente QR, para explorar distintas configuraciones de puntos)

c | ¿Existe siempre un punto que cumpla con las condiciones dadas para el refugio, sin importar la ubicación de A, B y C?

d | ¿Hay situaciones en las que ese punto no se puede determinar? ¿Qué características tienen esas configuraciones?

e | ¿En qué casos el refugio queda dentro de la región delimitada por los tres puestos? ¿Y cuándo queda fuera?

f | Una vez determinada la ubicación del refugio, ¿dónde debería situarse un cuarto puesto de manera que se encuentre a la misma distancia del refugio que los puestos A, B y C? ¿Esa ubicación sería única?



Del diálogo a las ideas Discusión en acción

2. Juego: “Ruta Segura: Desafíos de Montaña”

Formen parejas y prepárense para competir en un juego de desafíos geométricos en un entorno montañoso.

El objetivo

Aplicar tus conocimientos sobre construcciones geométricas para resolver situaciones reales de orientación, diseño y planificación en la montaña.

Reglas del juego

- 1) El mazo contiene 20 tarjetas llamadas “Desafíos de Montaña”. Cada pareja recibe 10 tarjetas distintas, con desafíos similares.
- 2) Se juega por turnos. Un jugador extrae una tarjeta de su mazo y debe resolver el desafío usando regla y compás (en papel o en GeoGebra, y sin cuadrícula), sin instrumentos de medición numérica.
- 3) Una vez realizada la construcción, el jugador debe explicar cómo resolvió el desafío y justificar que su solución es correcta.
- 4) El oponente revisa la construcción y la explicación, y puede hacer preguntas o pedir precisiones.
- 5) Si el desafío fue bien resuelto y explicado, el jugador suma 1 punto. Si hay errores o dudas importantes, no se suma punto y se pasa al siguiente turno.
- 6) El primer jugador en alcanzar 4 puntos gana la partida.
- 7) Si ambos jugadores llegan a 4 puntos en la misma ronda, se juega una ronda de desempate con una tarjeta adicional.

Materiales necesarios

- ✓ Juego de tarjetas (entregado por el docente).
- ✓ Instrumentos de geometría (regla y compás), lápiz y goma.
- ✓ Papel liso (sin cuadrículado ni rayado) o dispositivos con GeoGebra.

Tarjetas



La brújula del capitán

El capitán quiere montar un nuevo refugio equidistante a los puestos A y B para garantizar provisiones a ambos. Indicá tres ubicaciones posibles donde podría instalarse.



En el corazón del bosque

Entre los puntos que están a la misma distancia de los refugios A y B, ubicá dos puntos que además estén a igual distancia de ambos refugios.



Sendero al punto medio

El guía quiere ubicar una estaca justo a mitad de camino entre los campamentos M y N para colocar una señal. Indicá el punto preciso.



El paso secreto

Entre los refugios E y F hay una grieta peligrosa. Marcá con precisión el punto medio del trayecto recto para colocar un puente.



Doble travesía

Un nuevo camino recto debe tener el doble de largo que el trayecto entre E y F. Usá la distancia entre estos puestos para trazar el nuevo sendero.



A mitad del esfuerzo

Un explorador quiere trazar un camino recto que mida exactamente la mitad del trayecto entre los puntos P y Q. Ayudalo a construirlo.



El vigía

Desde el mirador A se observa el puesto B. Trazá todos los puntos del terreno que estén a igual distancia del puesto B que el vigía en A.



El radar de cobertura

Para verificar el alcance del nuevo radar de rescatistas en B, trazá una circunferencia que llegue justo hasta el punto de referencia A.

Encrucijada en ángulo recto

Desde el punto A, se necesita construir un sendero que cruce en ángulo recto el camino hacia B. Marcá con precisión esa encrucijada.

El mástil vertical

Para colocar una antena con base en un punto C, ésta debe estar perpendicular al camino que une C y A. Trazá la línea que asegure que esté perfectamente vertical.

Paralelas del guardabosque

El guardabosque parte del punto R y quiere trazar un camino paralelo al trayecto entre los puntos P y S. Asegurá que no se pierda.

Caminos gemelos

Desde el puesto C, construí un nuevo sendero que sea paralelo al camino entre D y E, para unir puestos en línea recta.

Armado de tiendas

Ya están ubicadas en A y B dos tiendas. Ubicá una tercera en un punto C de modo que las tres estén equidistantes.

El triángulo sagrado

El chamán de la montaña pide construir un triángulo donde las distancias entre los tres puestos G, H y J sean iguales. ¿Dónde ubicar J?

El rincón del vigía

El faro debe instalarse en un lugar que esté a igual distancia de tres refugios A, B y C (que no estén alineados). Determiná el lugar perfecto.

La torre de control

La torre debe controlar los puestos A, B y C por igual. Hallá el punto desde donde esté a la misma distancia de cada uno.

 **Sin centro, sin control**

Elegí tres ubicaciones de puestos que impidan instalar una torre equidistante de todos.

 **Un triángulo imposible**

Explorá cómo ubicar tres puntos que no permitan construir un punto equidistante a los tres.

 **Senderos rectos**

Desde A, se extienden dos caminos hacia B y C. Son perpendiculares, y las distancias A a B y A a C son iguales. ¿Cuál será el camino recto que une B y C?

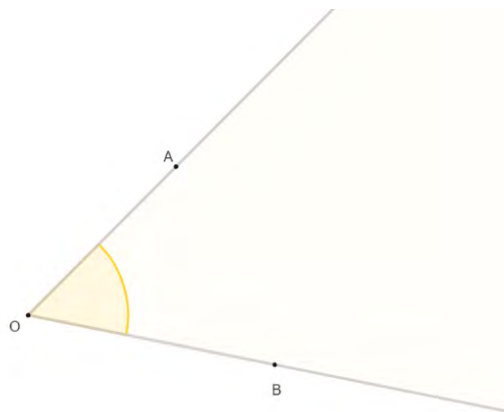
 **Senderos rectos**

Desde A parten caminos a B y a C, perpendiculares entre sí. Pero A a B es el doble que A a C. ¿Cuál es el sendero que une B y C directamente?

3. "Hora de seguir instrucciones"

En la imagen se muestra una representación de un ángulo, el \widehat{AOB} , el cual tiene vértice en el punto O y sus lados son las semirrectas OA y OB.

(¿Recordás qué es una semirrecta? ¿Qué la diferencia de una recta? ¿Y de un segmento?)



a | ¿Cómo construir un ángulo que mida lo mismo que el \widehat{AOB} haciendo uso de una regla y un compás? En el código QR podrás acceder a un posible instructivo para responder a este interrogante.



b | Trazá al menos tres ángulos más, dale nombres, y luego construí con regla y compás un ángulo que mida lo mismo que cada uno que inventaste.

c | ¿Cómo construir un ángulo que mida la mitad de que lo que mide el \widehat{AOB} ? En el cuadro podrás acceder a un instructivo para responder a este interrogante.

<p>1. Nombrar el ángulo.</p>	<p>Llamá al vértice del ángulo O, y sus lados \overline{OA} y \overline{OB}.</p>
<p>2. Tomar medida con el compás.</p>	<p>Con una medida conveniente y, con centro en O, trazá un arco que corte ambos lados del ángulo. Marcá los puntos de intersección como P (en \overline{OA}) y Q (en \overline{OB}).</p>
<p>3. Hallar el punto R.</p>	<p>Sin cambiar la apertura del compás, hacé centro en P y trazá un arco. Luego, hacé centro en Q y trazá otro arco con la misma apertura que cruce al anterior.</p> <p>Llamá R al punto de intersección entre esos dos arcos.</p>
<p>4. Trazar el segmento AR.</p>	<p>Trazá la semirrecta con centro en O y que pasa por R. Esta se denomina bisectriz del ángulo, y lo divide en dos ángulos de igual medida.</p>

d | ¿Cómo construir un ángulo que mida el doble de lo que mide el ángulo \widehat{AOB} ? Pensá en una estrategia de resolución, y redactá un instructivo que permita explicitar los pasos seguidos.

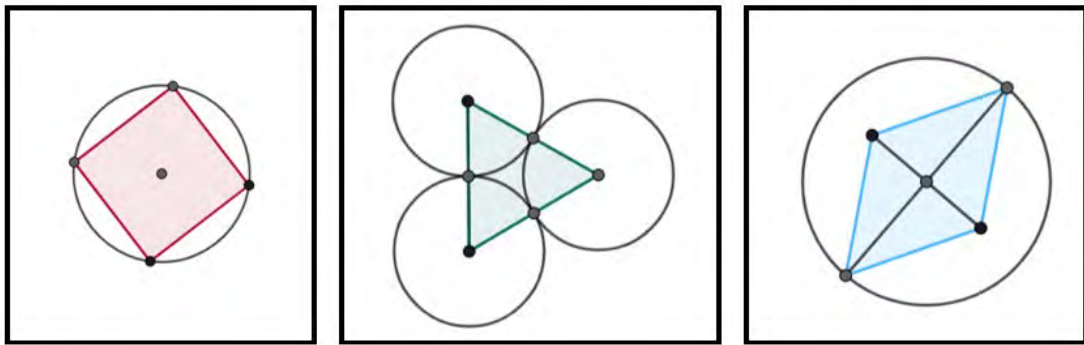


Del diálogo a las ideas Discusión en acción

Afianzando Ideas: Reflexiones con un toque extra

4. "Correo geométrico"

a | Observá con atención la figura que se te entregó. Analizá qué construcciones geométricas fueron necesarias para obtenerla. (Se entrega una figura al estudiante).



b | Reproducí la figura utilizando únicamente regla no graduada y compás.

c | Escribí un instructivo de construcción detallado, es decir, una secuencia clara de pasos que permita reproducir la figura sin verla.

d | Entregale, a modo de mensaje, ese instructivo a un compañero. Él deberá reproducir la figura solo siguiendo tus indicaciones, sin mirar la original.

e | ¿La figura obtenida por tu compañero coincide con la original? En caso de que no, ¿qué aspectos del instructivo pueden mejorarse? ¿Qué detalles se deben ajustar para lograr una reproducción más precisa?



ACTIVIDAD 1

Sugerencias para el docente

La actividad tiene por objetivo que el estudiante desarrolle habilidades de construcción geométrica de forma crítica, es decir, que no solo haga uso de instrumentos geométricos, sino que construya en base a propiedades geométricas, que explore con esas construcciones de manera que pueda formular conjeturas a partir de esa permanente interacción con la construcción y que produzca argumentos que validen las conjeturas.

Esta actividad está prevista para desarrollarse en 12 horas cátedras.

Antes de comenzar a resolver la primera tarea de esta actividad, es fundamental explorar las concepciones de los estudiantes en relación a "medir", y en particular, sobre la medición de longitudes. Cuando se les solicita medir la distancia entre dos puntos, el recurso inmediato que los estudiantes suelen usar es la regla, ya que les permite obtener una medida convencional y bastante precisa. Pero, será importante preguntarles: *"¿Es posible medir una distancia sin una regla?"*

Para trabajar esta situación, en diálogo con los estudiantes, se les podría plantear la siguiente situación:

- ¿A qué distancia estás de la puerta del aula? Imaginemos que el punto A se encuentra en tu lugar en el aula, y el punto B en la puerta. Para medir esa distancia, podrías utilizar una regla... pero también podrías utilizar un lápiz. ¿A cuántos "lápices" de distancia estás de la puerta? Ahora bien, si un compañero te presta su lápiz, que está un poco más gastado y por ende es más corto, ¿la distancia medida con ese lápiz será igual a la medida tomada con el tuyo? Esto nos lleva a una reflexión interesante: ¿qué es lo que cambia, la distancia o la forma en que la medimos?

Podemos extender esta idea y explorar qué sucede al medir con un cuaderno, un borrador o cualquier otro objeto. Estas formas de medición se conocen como no convencionales, pero siguen siendo válidas, y lo más interesante es que todas las mediciones, aunque expresadas en unidades distintas, son equivalentes en cuanto a la relación espacial entre los puntos.

- Ahora, marcá un punto A en tu banco. ¿Podrías identificar un punto que esté exactamente a un lápiz de distancia? ¿Es el único punto posible? Este desafío nos lleva a pensar en conceptos geométricos más amplios.

Históricamente, uno de los instrumentos utilizados para medir distancias sin necesidad de una regla graduada, es el compás. Con él, podemos fijar la abertura entre dos puntos y trasladar esa medida a otros lugares. Además, si colocamos el compás con su

centro en un punto y giramos su abertura constante, describimos un lugar geométrico: el conjunto de todos los puntos que están a la misma distancia del centro. ¿Qué figura considerás que se forma?

Una vez abordadas estas ideas y reflexiones en el aula, estaremos listos para avanzar hacia la Tarea 1.

La tarea 1, "**¿Dónde está el refugio?**", tiene como propósito que los estudiantes desarrollen habilidades de construcciones geométricas básicas fundamentales, formulen conjeturas a partir de la exploración y validen sus afirmaciones mediante la percepción visual, la experiencia empírica y los primeros argumentos geométricos. El contexto planteado en un entorno montañoso permite que los estudiantes descubran conceptos geométricos de forma intuitiva y significativa al intentar ubicar un refugio que esté a igual distancia de dos o más puestos de monitoreo.

En el primer interrogante, los estudiantes deben encontrar un lugar donde el refugio esté a igual distancia de dos puntos, A y B. El objetivo es que exploren mediante prueba y error, encuentren otros puntos, además del punto medio, utilizando el compás para medir distancias, y descubran que existe una alineación de puntos equidistantes respecto de A y B, que corresponde a la mediatriz del segmento (aunque aún no se haya definido tal objeto). En esta fase, el docente debe fomentar la experimentación libre, permitiendo que los estudiantes marquen puntos, tal vez primero de forma azarosa, midan y ajusten. El uso de herramientas digitales como GeoGebra puede ser una buena estrategia para validar visualmente estas construcciones y contrastar con lo realizado en papel, aunque no se constituye en un recurso indispensable para resolver la tarea.

El segundo interrogante extiende esta exploración, proponiendo hallar el lugar donde el refugio esté a igual distancia de otros pares de puntos (B y C, A y C). Aquí se espera que los estudiantes, al repetir el procedimiento realizado para A y B, identifiquen patrones en los puntos equidistantes y noten que se generan otras rectas.

En el tercer interrogante, el desafío es identificar el lugar donde el refugio esté a igual distancia de los tres puestos (A, B y C). La expectativa es que los estudiantes, utilizando regla y compás o GeoGebra, descubran que la intersección de las tres mediatrices, aunque ahora son solo rectas, define ese lugar.

La intervención docente, si hiciera falta, puede orientarse a cuestionar: "*¿Qué notás al trazar estas dos rectas?, ¿Qué significa el lugar donde se intersecan?*" Estas preguntas guían el razonamiento hacia la idea de que la intersección representa un lugar de equidistancia con respecto a los tres puntos, aunque aún no se formalice el concepto de "circuncentro".

Además, se propone la exploración de distintos posicionamientos para A, B y C, observando que, si los puntos están alineados, las mediatrices no se intersecan. En ese caso, el docente puede intervenir para promover el análisis: "*¿Por qué en este caso no se intersecan?*", "*¿Qué ocurre con las líneas al estar los puntos sobre una misma recta?*", facilitando la comprensión de que esas mediatrices son paralelas y no tienen un punto común de equidistancia.

En un segundo momento, se propone trabajar en el apartado: "Para seguir pensando", en donde el foco está en profundizar el análisis y la justificación geométrica. Se espera que los estudiantes discutan sobre la validez de las construcciones, exploren diversas configuraciones de los puntos A, B y C, incluso analicen casos donde el refugio no existe (puntos alineados), y propongan ubicaciones para un posible cuarto puesto manteniendo la equidistancia. En esta instancia, el docente debe fomentar el debate y la argumentación, proponiendo preguntas que guíen la reflexión y permitan identificar aspectos a ajustar en la construcción o en los razonamientos.

En **b**, se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades comunicacionales en relación al trabajo realizado de hallar la ubicación del refugio. En sus argumentos, podrán remitirse a medir con diversos instrumentos (convencionales o no), o explicar desde lo explorado ese punto de intersección entre las rectas obtenidas.

Para afianzar ideas, se plantea en **c**, que exploren nuevas configuraciones. Aquí resultará valioso el uso de GeoGebra para extraer conclusiones aprovechando el dinamismo del software. Entre esas configuraciones, surgirá la idea de qué es lo que ocurre cuando A, B y C son tres puntos distintos y colineales. Este análisis propuesto en **d** y **e**, lleva a discutir la idea de intersección de rectas que en ese caso (A, B y C alineados) son paralelas, es decir que "no se cortan".

Los interrogantes **f** y **g**, son ampliatorios (aunque sugeribles). El primero pide analizar la configuración de los puntos A, B y C como una región triangular, y mediante el trabajo empírico, notar que si el triángulo ABC es obtusángulo entonces el refugio queda fuera de la región triangular (incluso ver que, si es triángulo rectángulo, el refugio se encuentra en un lado del mismo). Finalmente, en **g**, se propone analizar la idea de circunferencia, con centro en ese refugio y que se "pase" por los puntos A, B y C, pero también por un cuarto punto. Bajo la discusión inicial sobre "medición", podría construirse la noción de la circunferencia circunscrita en el triángulo.

Luego del análisis de los interrogantes, se propone una instancia de socialización en la que los estudiantes presenten sus construcciones y argumenten sus hallazgos. El docente interviene con preguntas orientadoras para profundizar el análisis y guiar hacia la formalización de los conceptos de punto medio, mediatriz, circuncentro y circunferencia circunscrita, pero además revisar conceptos de paralelismo y perpendicularidad, e incidencia de rectas.

Además, se introducen los protocolos de construcción geométrica, brindados por el docente en distintos formatos (texto, imágenes o video). Los estudiantes podrán ajustarlos y personalizarlos en función de sus propias experiencias y hallazgos, creando un apunte de consulta para uso personal.

A modo de familiarización con los conceptos y relaciones geométricas exploradas en la tarea 1, y a partir de los instructivos de construcción formalizados por el docente y ajustados por los estudiantes en sus carpetas, se propone la tarea 2: "**Ruta Segura: Desafío de Montaña**". Esta propuesta lúdica tiene como propósito afianzar esas ideas emergentes de la exploración, además de desarrollar habilidades de comunicación matemática. Durante el

juego, los estudiantes deben explicar de manera clara las construcciones que realizan, describir el proceso llevado a cabo y argumentar por qué sus propuestas son correctas, mientras el oponente revisa y valida la construcción, fomentando el pensamiento crítico y el diálogo matemático.

El rol del docente es clave para acompañar el proceso, observando e interviniendo estratégicamente cuando sea necesario para promover explicaciones claras y argumentaciones sólidas. Se sugiere realizar preguntas orientadoras que impulsen a los estudiantes a justificar sus construcciones: "*¿Cómo podrías demostrar que esos puntos están realmente a la misma distancia?*" o "*¿Qué características debería cumplir la construcción para asegurar esa igualdad de distancias?*". Además, un aspecto fundamental que el docente no debe descuidar es el vocabulario utilizado por los estudiantes al explicar sus procedimientos, ya que este revela el tipo de razonamiento geométrico que han desarrollado. La forma en que se expresan sobre conceptos como segmentos de igual medida, *paralelo*, *perpendicular*, *punto medio*, *mediatriz*, *circunferencia*, entre otros, permite identificar niveles de comprensión y posibles dificultades. Finalmente, el docente puede alentar la reflexión sobre los distintos modos de validación que surgen en el juego: la percepción visual, el uso de instrumentos y la explicación argumentativa, fortaleciendo así el vínculo entre la práctica lúdica y el conocimiento matemático formal.

En la Tarea 3, se propone trabajar sobre distintos formatos de instructivos de construcción, profundizando en conceptos geométricos fundamentales y fortaleciendo habilidades para la interpretación y elaboración de procedimientos claros y precisos.

Para iniciar, se plantea un recordatorio sobre los conceptos de ángulo, semirrecta, recta y segmento. Este momento puede desarrollarse en un diálogo entre el docente y el grupo, permitiendo que los estudiantes expongan sus ideas y diferencias entre estas nociones. La intervención del docente aquí es clave para clarificar conceptos y unificar el lenguaje geométrico.

En el ítem **a**, los estudiantes deben seguir los pasos de un video tutorial para construir ángulos de igual medida, lo que más adelante se identificará formalmente como ángulos congruentes. En esta instancia, se espera que los estudiantes comprendan el proceso de copia y comparación de ángulos mediante técnicas geométricas clásicas. En el ítem **b**, se propone una consigna similar para afianzar esta habilidad. El docente puede intervenir con preguntas como: "*¿Cómo podrías demostrar que ambos ángulos miden lo mismo?*" o "*¿Qué método te resulta más preciso para comparar?*". Es probable que algunos estudiantes recurran al transportador, mientras que otros (aquellos que no recuerden cómo usarlo, o no lo tengan disponible) opten por la superposición de figuras, lo cual enriquece el debate sobre validez y precisión.

El ítem **c** introduce un nuevo formato de instructivo, esta vez expresado en un lenguaje coloquial, para guiar la construcción de un ángulo mitad, lo que más adelante formalizará a través del concepto de bisectriz. Aquí, el desafío está en interpretar los pasos comunicados de manera menos técnica y traducirlos en acciones geométricas. El docente puede estimular la reflexión preguntando: "*¿Cómo sabes que el ángulo trazado es exactamente la mitad?*", promoviendo la justificación geométrica.

En el ítem **d**, se da un paso más allá: los estudiantes deben formular un instructivo propio para construir un ángulo doble. Esta consigna busca que reinviertan lo aprendido en los ítems anteriores, considerando que la construcción de un ángulo consecutivo al dado, con igual amplitud, produce uno del doble de medida. El docente puede intervenir preguntando: *“Si este es el doble, ¿dónde estaría la bisectriz?”*, esperando que identifiquen el lado común de ambos ángulos como esa división simétrica.

Una vez finalizadas las tareas 2 y 3, se propone un espacio de puesta en común donde los estudiantes exponen en el pizarrón sus producciones, explicando los procedimientos empleados y justificando sus decisiones. El docente interviene realizando preguntas que guíen el análisis crítico y fomenten el uso de un vocabulario geométrico preciso, corrigiendo y enriqueciendo las expresiones cuando resulte necesario. En este espacio, se promueve la comparación de estrategias, validando aquellas más eficientes y destacando argumentos visuales y geométricos que respalden cada construcción.

A medida que se desarrolla la puesta en común, principalmente de la tarea 3, el docente organiza en el pizarrón un esquema conceptual que los estudiantes deben registrar en sus cuadernos. En este esquema, se incluyen definiciones claras de *ángulo congruente*, *bisectriz*, *ángulo doble*, *ángulo mitad*, junto con los protocolos de construcción expresados en un lenguaje técnico y representaciones geométricas correctamente notadas. Este registro se convierte en un apunte formal de consulta para futuras actividades.

La Tarea 4: **"Correo Geométrico"** tiene como propósito fundamental que los estudiantes reinviertan y pongan en juego de manera autónoma todas las habilidades geométricas desarrolladas en la actividad. En esta instancia, se espera que interpreten visualmente una figura, identifiquen trazados, objetos y relaciones geométricas subyacentes, y reproduzcan esa construcción utilizando regla y compás, con precisión y criterio. Esta tarea permite evaluar el nivel de desempeño en términos de visualización espacial, identificación de elementos clave y planificación de estrategias para abordar un problema geométrico desde una representación geométrica:

- Figura 1: En esta figura, se espera que el estudiante reconozca un cuadrado inscrito en una circunferencia. Un posible camino (abreviado) para construirlo es:
 - a. Construir el cuadrado mediante el trazado de segmentos congruentes y perpendiculares de a pares.
 - b. Hallar el centro del cuadrado trazando las diagonales, que se intersecan en un punto central.
 - c. Con centro en ese punto de intersección, se realiza una circunferencia desde el centro a un vértice del cuadrado.

Pregunta de análisis: ¿Por qué al trazar una circunferencia con el mismo centro y radio igual a la distancia desde el centro a los vértices, esta circunferencia pasa exactamente por esos cuatro puntos?

- Figura 2: Aquí se identifica un triángulo equilátero y tres circunferencias con centro en los vértices del triángulo. Los pasos (abreviados) podrían ser:

- a. Construir el triángulo equilátero, asegurándose de que todos sus lados y ángulos sean congruentes.
- b. Señalar los puntos auxiliares, que son los puntos medios de cada lado del triángulo.
- c. Finalmente, trazar las circunferencias con centro en los vértices del triángulo y que pasen por el punto medio del lado opuesto.

Pregunta de reflexión: ¿Por qué si una de esas circunferencias pasa por un punto medio, también pasa por el punto medio del lado adyacente?

- Figura 3: La última figura muestra un rombo y una circunferencia que pasa por dos de los vértices. Para su construcción podría recurrirse:
 - a. Comenzar trazando las diagonales perpendiculares, que se bisecan mutuamente, teniendo en cuenta que una de ellas es del doble de longitud que la otra.
 - b. Unir los extremos de las diagonales para formar el cuadrilátero.
 - c. Finalmente, trazar la circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y que pase por los extremos de la diagonal más larga.

La propuesta también fomenta el desarrollo de habilidades comunicativas, ya que cada estudiante debe elaborar un instructivo detallado y claro, capaz de guiar a un compañero para que reproduzca su construcción. Este protocolo, que puede ser en formato escrito, esquemático o incluso audiovisual, desafía al estudiante a organizar sus ideas de manera secuencial y comprensible, empleando un lenguaje geométrico adecuado. La revisión mutua de los instructivos permite a cada participante contrastar sus propias representaciones con las interpretaciones ajenas, desarrollando un sentido crítico y de validación que fortalece el pensamiento geométrico y argumentativo.

Durante el quehacer de los estudiantes, el docente cumple un rol de acompañamiento y observación, interviniendo -si fuera necesario- con preguntas estratégicas que impulsen el análisis crítico: *¿Qué propiedades estás utilizando para decidir esos trazados?, ¿Cómo podrías asegurarte de que la construcción del compañero es correcta?, ¿Podrías explicar por qué ese paso es necesario?* Además, promueve la reflexión sobre la claridad y efectividad de los instructivos, incentivando a los estudiantes a revisar y ajustar sus explicaciones para que sean más precisas. Esta instancia se convierte en un valioso espacio para que los estudiantes consoliden sus aprendizajes, argumenten sus decisiones y valoren la importancia de una comunicación geométrica clara y efectiva.



ACTIVIDAD 2

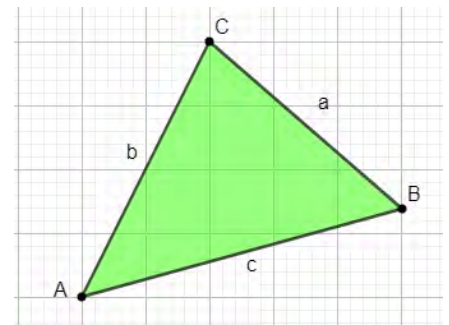
Construir triángulos, deducir propiedades

1. “¿Qué es un triángulo?”

“Se dice que una figura plana es una porción delimitada del plano, y un ejemplo de ésta es el triángulo”.

a | En la imagen se muestra una representación de un triángulo. ¿Qué lo caracteriza? ¿Cuáles son sus elementos, y qué particularidades reconocés de éstos? ¿Cómo lo nombrarías?

b | Compartí tus respuestas con algún compañero, y entre los dos, propongan una definición de triángulo.



Tips para dar una buena definición: La regla del ¿Qué es? y ¿Cómo es?

1. ¿Qué es? La definición debe explicar “qué es” el concepto de manera sencilla y directa, usando palabras que todos puedan entender, y evitando usar el concepto que se está definiendo dentro de la misma definición.

2. ¿Cómo es? Es importante mencionar solo las características fundamentales de “cómo es”, sin agregar información innecesaria, de manera que con esa caracterización se lo pueda identificar fácilmente.

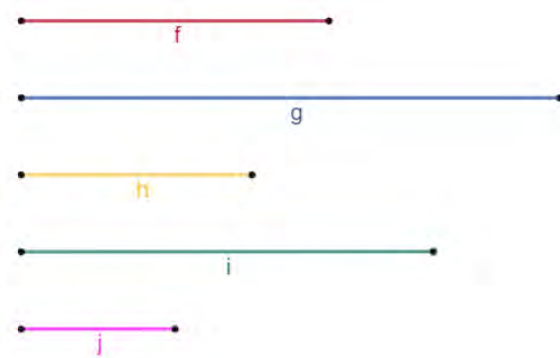


Del diálogo a las ideas Discusión en acción

2. “Los lados del triángulo”

Reunidos en equipos de trabajo, resuelvan:

En la clase de matemática, Luciana, Marcos y Florencia debaten sobre la posibilidad de construir un triángulo utilizando tres de los segmentos que se muestran en la imagen.



Luciana sostiene que cualquier terna de segmentos permitirá construir un triángulo.



Marcos opina que, de todas las combinaciones posibles de tres segmentos, solo una permite construir un triángulo.



Florencia considera que el triángulo que se forme con tres de esos cinco segmentos dependerá de cuál segmento se elija primero para iniciar la construcción.

a | ¿Qué opinan sobre cada una de las afirmaciones planteadas? Fundamenten sus ideas con explicaciones claras, y realizando construcciones geométricas utilizando regla no graduada y compás para justificar cada caso.

b | Propongan nuevos ejemplos de ternas de segmentos que posibiliten la construcción de un triángulo haciendo uso de los mismos como lados, y otros en los que la construcción no sea posible hacer.

c | Completen, con sus propias palabras, el siguiente cuadro que sintetiza los aspectos que deben considerarse para que tres segmentos puedan formar un triángulo. Además, incluyan un comentario sobre los casos en los que la construcción del triángulo no es posible:



Conclusión

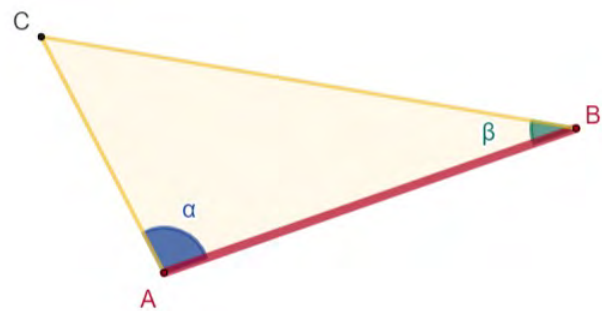
A partir de tres segmentos, a , b y c , éstos permiten construir un triángulo usándolos como lados del mismo, siempre que

Mientras que la construcción es imposible cuando

3. "Los ángulos del triángulo"

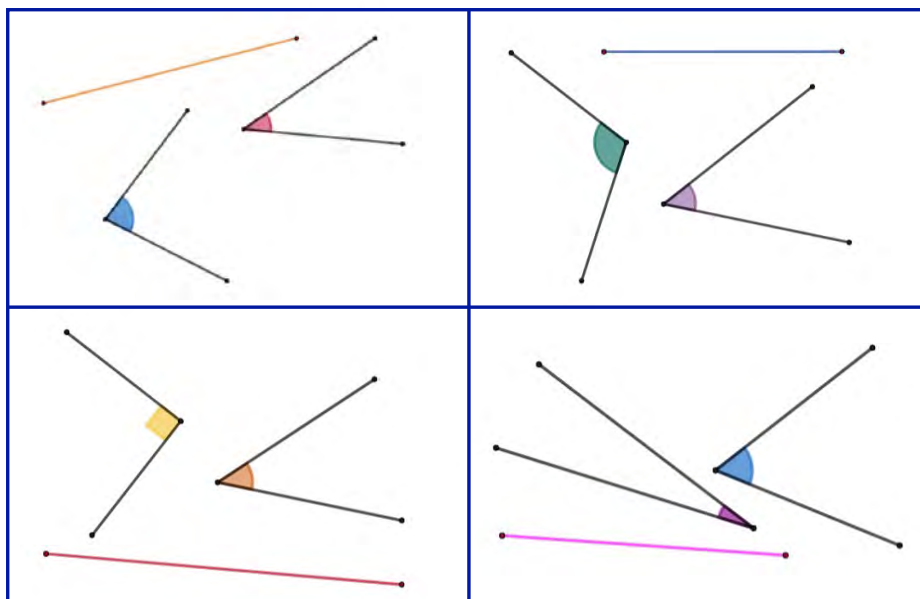
Con tu mismo equipo de trabajo con el que resolviste la tarea anterior, resuelvan los siguientes interrogantes:

a | Se dice que, en un triángulo, los ángulos interiores "adyacentes" a un lado \overline{AB} , son los que tienen vértice en los extremos A y B . En la imagen, los adyacentes al lado \overline{AB} son \widehat{BAC} y \widehat{CBA} , nombrados respectivamente como α y β .



¿Cuáles son los ángulos adyacentes a los lados \overline{CA} y \overline{BC} ?

b | Realicen, para cada caso, las construcciones del triángulo que tiene al segmento dado como lado, y a los ángulos propuestos como adyacentes a ese lado.



Se les ocurre cambiar algún ángulo de los dados en cada imagen, de manera tal que la construcción del triángulo no sea posible? ¿Por qué?

c | Haciendo uso del transportador, tomen las medidas de los tres ángulos del cada triángulo construido en el ítem anterior.



Si no recuerdan cómo usar el transportador, con el código QR podrán acceder a un video que puede ayudarlos.

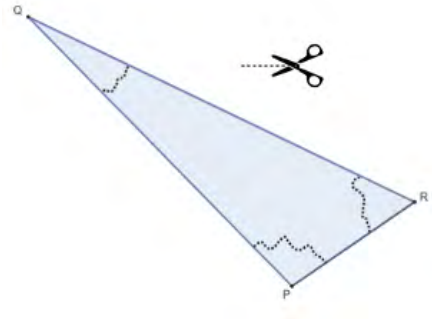
¿Qué tienen en común las ternas de medidas de ángulos que han tomado?

d | En una hoja en blanco, dibujen distintos triángulos.

Para cada uno de los ejemplos propuestos, recorten sus esquinas.

Luego, unan cada una de las tres esquinas, de manera que todas compartan un mismo vértice y quede una a continuación de la otra.

Peguen en la carpeta las tres esquinas unidas. ¿Qué particularidad pueden observar respecto a lo obtenido al unir esas esquinas en todos los casos?



e | Teniendo en cuenta lo resuelto en el ítem anterior, considerando que las esquinas recortadas representan a los ángulos del triángulo, redacten, con sus propias palabras, una conclusión que describa qué propiedad debe satisfacer los ángulos interiores de cualquier triángulo:



Conclusión

En todo triángulo se cumple que.....
.....



Del diálogo a las ideas Discusión en acción

Afianzando Ideas: Reflexiones con un toque extra

4. Para repasar lo visto hasta el momento.

a | La siguiente tabla presenta diversos datos sobre segmentos y ángulos. Analizá si cada conjunto de datos permite construir un triángulo y marcá con una "X" si la construcción es posible **siempre, a veces** o **nunca**.

A partir de...	SIEMPRE	A VECES	NUNCA
tres segmentos, uno que mide 4 cm, otro de 6 cm, y un tercero de 8 cm.			
dos ángulos rectos.			
tres segmentos, uno que mide 3 cm, otro de 7 cm, y un tercero de 4 cm.			
un segmento de 20 cm, un ángulo de 90° y otro de 60° .			
tres lados que miden lo mismo.			
tres ángulos agudos.			
tres ángulos que miden lo mismo.			
tres ángulos, uno de 45° , otro de 70° y el tercero de 65° .			

b | Construí, en caso de ser posible, con instrumentos geométricos (sin transportador) triángulos isósceles, que además cumplan con la condición extra que se propone en cada caso. En caso de que no sea posible hacer la construcción, explicá las razones.

- Es obtusángulo;
- Tiene un ángulo recto;
- Tiene dos ángulos obtusos;
- Es equilátero.



¿Te acordás cómo se clasifica un triángulo?

Según los lados:

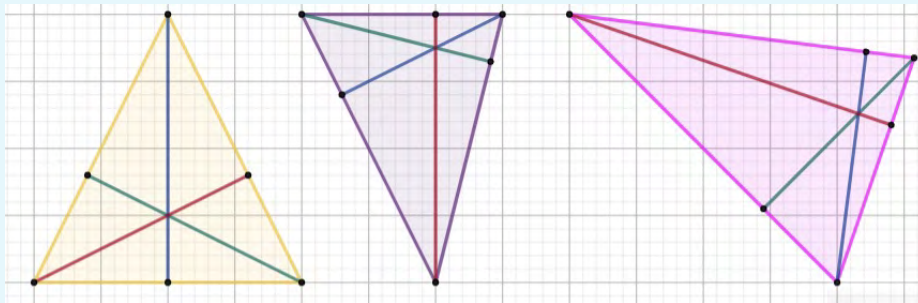
- Si tiene sus tres lados de diferentes medidas, es **ESCALENO**;
- Si tiene dos lados de igual medida, es **ISÓSCELES**. En particular, si los tres lados miden lo mismo, es **EQUILÁTERO**.

Según los ángulos:

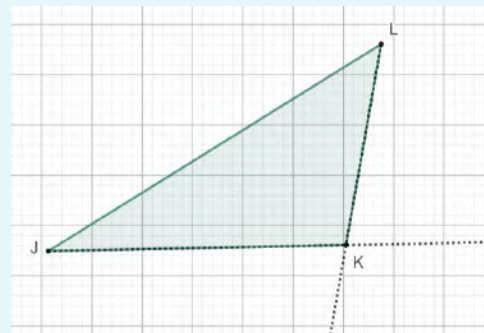
- Si tiene todos sus ángulos interiores agudos (miden menos de 90°) es un **ACUTÁNGULO**;
- Si un ángulo es recto (mide 90°), es un triángulo **RECTÁNGULO**.
- Si tiene un ángulo obtuso (mide más de 90°), es un **OBTUSÁNGULO**.

5. ¡El desafío! Alturas y medianas del triángulo.

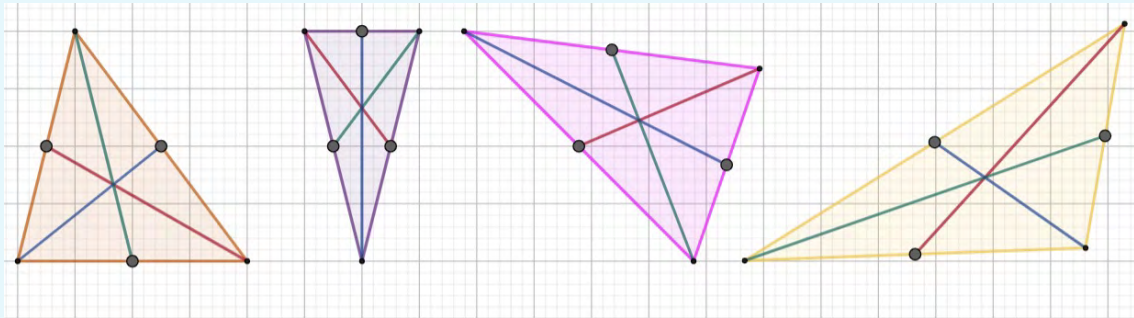
a | En la imagen se muestran triángulos para los que se han trazado sus alturas. Analizá las particularidades de estos segmentos y proponé una definición de altura de un triángulo.



- ¿Cuáles son las alturas de un triángulo rectángulo?
- ¿Cuáles son las alturas del triángulo obtusángulo JKL que se muestra en la imagen?



b | En la imagen se muestran triángulos para los que se han trazado sus medianas. Analizá las particularidades de estos segmentos y proponé una definición de mediana de un triángulo.

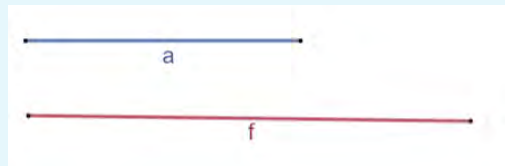


- Construí un triángulo equilátero y trazá sus medianas.

c | Los siguientes problemas son dos desafíos de construcción. Para resolverlos, hacé uso de GeoGebra, o bien trabajá con los instrumentos geométricos en tu carpeta.

- Un triángulo es tal que uno de sus lados es el segmento f y su respectiva altura es a .

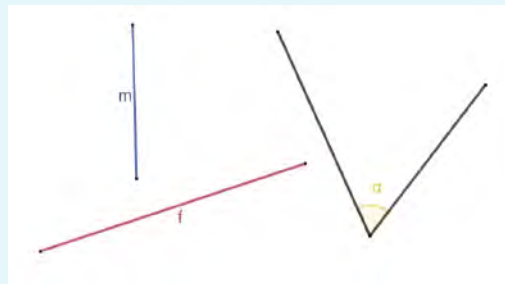
Hacé la construcción de dicho triángulo, e indicá un instructivo de los pasos seguidos. ¿La construcción es única?



Luego trazá el resto de las alturas y las medianas.

- Un triángulo es tal que uno de sus lados es el segmento f , un ángulo adyacente a ese lado es α y la medida asociada al lado f es m .

Hacé la construcción de dicho triángulo e indicá un instructivo de los pasos seguidos. ¿La construcción es única?



Luego trazá el resto de las medianas y las alturas.



ACTIVIDAD 2

Sugerencias para el docente

La actividad tiene por objetivo que el estudiante, a través del desarrollo de habilidades de construcción geométrica trabajadas en la actividad anterior, indague sobre propiedades de triángulos tales como la desigualdad triangular y la propiedad angular, las cuales se constituyen en condiciones necesarias y suficientes para construir triángulos a partir de segmentos-lados y ángulos.

Esta actividad está prevista para desarrollarse en 10 horas cátedras.

La consigna de la tarea 1 puede gestionarse a través de una lectura en voz alta y una discusión grupal al inicio y luego producciones y discusiones en el banco. Se introduce el concepto de figura plana y se presenta una imagen de un triángulo, solicitando a los estudiantes que formulen una definición propia. Para ello, se propone que mediante el uso de las preguntas "¿Qué es?" y "¿Cómo es?", los estudiantes exploren sus características esenciales: *una figura plana con tres lados, tres vértices y tres ángulos*.

El docente debe propiciar el intercambio de definiciones entre pares, generando un espacio de reflexión crítica para identificar si la información es suficiente o si se han agregado detalles innecesarios. Se espera que surjan ideas como que los ángulos se determinan por los vértices y los lados, y que la configuración espacial de los vértices influye directamente en la posibilidad de formar un triángulo.

Para guiar la discusión, el docente puede interrogar (y pedir que los estudiantes recuperen alguna conclusión de la tarea 1 de la actividad anterior):

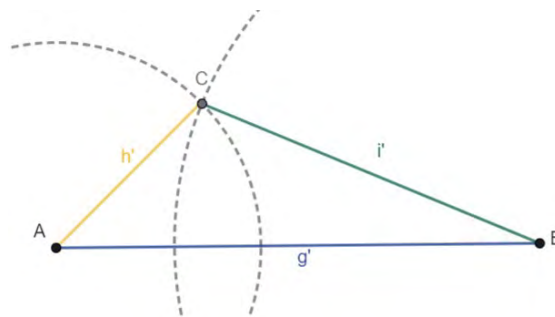
- ¿Los tres vértices pueden estar en cualquier posición?
- ¿Es posible construir un triángulo si los tres vértices están alineados?
- ¿Qué sucede con los lados y los ángulos en ese caso?

A partir de este diálogo, se busca arribar a una definición consensuada: **“Un triángulo es una figura plana, definida por tres puntos no alineados, que se unen mediante segmentos llamados lados”**.

En la tarea 2, **“Los lados del triángulo”**, se propone que los estudiantes exploren la construcción de triángulos a partir de ternas de segmentos. La primera consigna (ítem a) invita a trabajar en equipos para experimentar empíricamente qué ternas de segmentos permiten construir un triángulo.

Los estudiantes deberán:

- Probar con distintas ternas de segmentos, identificando cuáles permiten una construcción correcta y cuáles no.
- Retomar conceptos trabajados anteriormente, como la construcción de segmentos congruentes utilizando el compás.
- Definir y seguir un instructivo de construcción, por ejemplo: "Dado un segmento AB , se transfiere la medida de otros dos segmentos desde A y B , respectivamente. El tercer vértice, el C , del triángulo surge de la intersección de las circunferencias construidas en la transferencia."



Durante la exploración, se espera que identifiquen dos situaciones:

- Segmentos insuficientes:* Los arcos no se intersecan porque los segmentos son demasiado cortos.
- Segmentos exactos:* Los arcos se intersecan sobre el segmento (o en una prolongación de éste), haciendo que los puntos queden alineados y, por lo tanto, no se forme un triángulo.

<p>Los segmentos f', j' y h', son congruentes a f, j y h. En este caso, los arcos trazados para transferir las medidas de h y j, desde los vértices de g, no se intersecan, por lo que no se puede definir el tercer vértice del triángulo.</p>	<p>Los segmentos f', g' y h', son congruentes a f, g y h. En este caso, los arcos trazados para transferir las medidas de h y f, desde los vértices de g, se intersecan sobre el segmento g', haciendo que los vértices queden colineales, y entonces no hay triángulo.</p>
<p>"Los segmentos h y j son demasiado cortos respecto de g"</p>	<p>"Los segmentos h y f unidos, hacen al segmento g".</p>

Además, se espera que los estudiantes descubran que el triángulo formado no depende del orden en que se elijan los segmentos para iniciar la construcción. Esto anticipa el criterio de congruencia LLL, que se formalizará en futuras actividades.

En el ítem **b**, los estudiantes deben poner a prueba las conjeturas formuladas en el apartado anterior mediante nuevos ejemplos, contrastando empíricamente las condiciones necesarias para la construcción de un triángulo. Este proceso de validación refuerza el vínculo entre la experimentación y la formulación de conceptos geométricos.

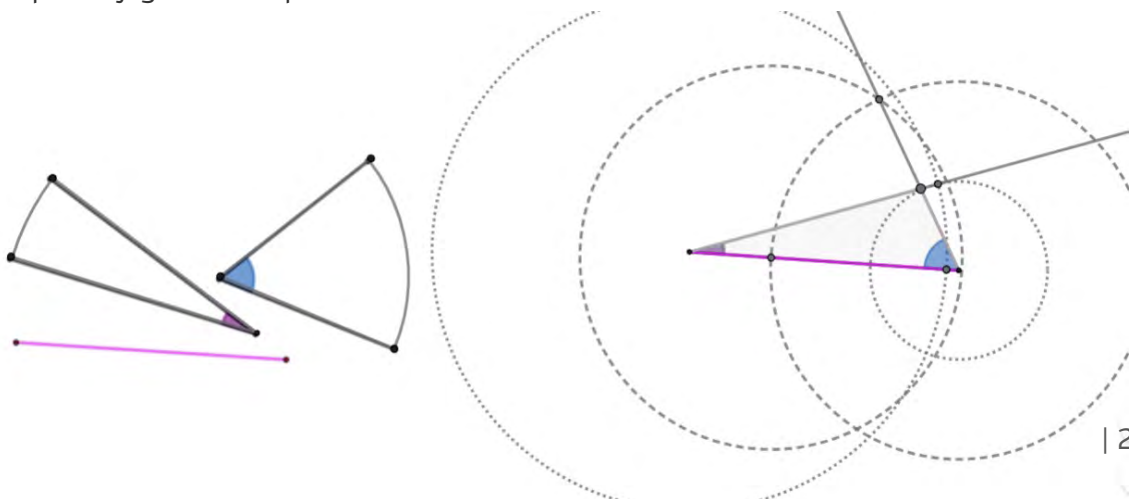
Finalmente, en el ítem **c**, se propone que los estudiantes redacten en sus propias palabras las conclusiones alcanzadas. Esto no solo consolida el conocimiento adquirido, sino que permite al docente identificar el grado de comprensión y los posibles obstáculos conceptuales que aún persistan.

En la tarea 3, **“Los ángulos del triángulo”**, se propone que los estudiantes trabajen en equipos para explorar las relaciones entre los ángulos interiores de un triángulo. La actividad inicia en el ítem a, donde se introduce la definición de ángulos adyacentes: aquellos que tienen su vértice en los extremos del lado seleccionado. A partir de esta definición, se pide a los estudiantes identificar los ángulos adyacentes para cada lado de un triángulo mostrado en una imagen. Además, se aprovecha este momento para comentar sobre la notación utilizada en geometría, en particular, el uso del abecedario griego para nombrar ángulos. Esto permite familiarizar a los estudiantes con un lenguaje matemático preciso y universal.

En el ítem **b**, los estudiantes deben construir triángulos a partir de un segmento dado como lado y los ángulos adyacentes correspondientes. El docente puede guiar esta exploración con preguntas orientadoras basadas en experiencias previas, tales como:

- ¿Cómo construir ángulos que tengan la misma medida que uno dado?
- ¿Cómo construir dos ángulos que compartan un lado en común?
- ¿Cómo podemos construir un triángulo que cumpla con esas condiciones?

Se sugiere que estas construcciones se realicen utilizando regla y compás, permitiendo que los estudiantes identifiquen los ángulos correspondientes en cada caso. Durante el proceso, el docente puede intervenir para recordar el uso adecuado de los instrumentos, enfatizando la necesidad de producir un propio protocolo de construcción, seguir un orden lógico en los pasos y garantizar precisión en los trazados:



Se agrega un ítem de discusión, en relación a posibles ángulos en donde la construcción no sea posible. Se espera que los estudiantes exploren casos en donde los lados de los ángulos no se intersequen, permitiendo esbozar las primeras ideas sobre las amplitudes de los ángulos en el triángulo. El docente puede interpelar a los estudiantes, pidiendo que analicen si la ideas esbozada depende de la medida del segmento dado como lado, o es independiente de este dato.

Una vez completadas las construcciones, el ítem c propone que los estudiantes utilicen el transportador para medir los tres ángulos interiores de cada triángulo. En caso de dudas sobre su uso, el docente puede brindar asistencia o sugerir el acceso a un video explicativo mediante un código QR. En esta instancia, se espera que los estudiantes identifiquen un patrón en las ternas de medidas obtenidas. El docente podría incentivar el análisis con preguntas como:

- ¿Qué observan sobre la suma de las medidas de los ángulos interiores?
- ¿Sucede lo mismo en todos los triángulos que construyen?

Luego de formular una conjetura sobre la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo, en el ítem d, se invita a los estudiantes a dibujar triángulos adicionales en una hoja en blanco, recortar sus esquinas y unir las compartiendo un mismo vértice. El objetivo de esta actividad es que, de manera visual, los estudiantes descubran que los tres ángulos, al unirse, forman un ángulo llano, es decir, la suma de sus medidas suma es de 180° . Esto refuerza y valida la conjetura previamente formulada. Durante esta instancia, el docente podría intervenir con preguntas tales como:

- ¿Qué sucede al unir las tres esquinas?
- ¿Se cumple esta relación en todos los triángulos?

Los estudiantes deben pegar estas producciones en sus carpetas, acompañadas de una breve explicación sobre lo observado, lo cual facilita el registro y la reflexión sobre el proceso.

Finalmente, en el ítem e, se solicita a los estudiantes que redacten una conclusión que sintetice lo trabajado: **"La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo siempre es igual a 180° , independientemente de la forma del triángulo"**. Este es un momento clave para que el docente enfatice la importancia de expresar conclusiones de manera clara y fundamentada, además de guiar a los estudiantes para que registren esta propiedad en sus carpetas, asegurando su comprensión y asimilación.

Después de completar las tareas 1, 2 y 3, se propone una instancia de socialización en la que cada grupo expone las conclusiones alcanzadas, discutiéndolas con el resto de la clase para aclarar conceptos y unificar criterios. Durante este intercambio, el docente orienta el debate, guiando a los estudiantes hacia una formulación clara y precisa de las propiedades descubiertas: la **Desigualdad Triangular** y la **Propiedad Angular**. Una vez consensuadas, el docente formaliza ambas propiedades en el pizarrón, introduciendo su expresión simbólica y destacando su relevancia en la construcción geométrica. Finalmente, los estudiantes registran estas formulaciones en sus cuadernos, consolidando así los aprendizajes construidos colectivamente.

Posteriormente se propone la tarea 4, a modo de familiarización de las propiedades formalizadas. En la consigna a, los estudiantes deben reconocer a esas propiedades como condiciones necesarias y suficientes en todo triángulo. Así se espera que completen:

A partir de...	SIEMPRE	A VECES	NUNCA	Explicación
tres segmentos, uno que mide 4 cm, otro de 6 cm, y un tercero de 8 cm.	X			Se cumple la desigualdad triangular: $8 < 4+6$
dos ángulos rectos.			X	No se cumple la propiedad angular: $90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$
tres segmentos, uno que mide 3 cm, otro de 7 cm, y un tercero de 4 cm.			X	No se cumple la desigualdad triangular: $7 = 4+3$
un segmento de 20 cm, un ángulo de 90° y otro de 60° .	X			Se cumple la propiedad angular: el tercer ángulo mediría 30° .
tres lados que miden lo mismo.	X			Se cumple la desigualdad triangular: $L < L+L$ (Triángulo equilátero).
tres ángulos agudos.		X		Depende de las medidas de los ángulos agudos.
tres ángulos que miden lo mismo.		X		Solo en caso de que midan 60° .
tres ángulos, uno de 45° , otro de 70° y el tercero de 65° .	X			Se cumple la propiedad angular: $45^\circ + 70^\circ + 65^\circ = 180^\circ$

A continuación, en el ítem **b**, se propone continuar con la construcción de triángulos, enfocándose en su clasificación según lados y ángulos. Este es un momento oportuno para, recuperar tales clasificaciones, aclarar que un triángulo equilátero es, en realidad, un caso particular de triángulo isósceles, y para explorar en profundidad las propiedades de los ángulos en triángulos equiláteros, isósceles y rectángulos.

La tarea 5 se plantea como un desafío de mayor complejidad, cuyo abordaje dependerá del desempeño del grupo y de las intenciones pedagógicas del docente. En esta instancia, se introducen dos conceptos fundamentales: las alturas y las medianas de un triángulo. Estos conceptos serán trabajados a partir de interpretaciones visuales de construcciones previas, el trazado en distintos triángulos y la elaboración de nuevas figuras a partir de estos elementos, permitiendo así un análisis más profundo de sus propiedades y aplicaciones.

Referencias bibliográficas

- Broitman, I., Itzcovich, H., & otros. (2012). Matemática en secundaria: 2 y 3.Ed. Santillana. CABA.
- Cappelletti, G., et al. (2008). Matemática: Geometría. Aportes para la enseñanza, nivel medio. Ministerio de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires.
- Clemens, S., et al. (1998). Geometría con aplicaciones y solución de problemas. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Iranzo, N. y Fortuny, J. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. Departament de Didàctica de les Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.
- Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la Geometría: de las construcciones a las demostraciones. Buenos Aires, Libros el Zorzal.
- Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M. y otros (2022). Clase Nro. 1: Hacer Geometría. Enseñanza y aprendizaje de la geometría. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M. y otros (2022). Clase Nro. 2: hacer geometría en el aula. Enseñanza y aprendizaje de la Geometría. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- Novembre, A. (coord.); Benito, C.; Nicodemo, M. y otros (2022). Clase Nro. 3: Geometría Dinámica. Enseñar y aprender Matemática en la escuela secundaria. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
- Samper, C. y otros (2013). Tareas que promueven el razonamiento en el aula a través de la Geometría. Colombia; Ed. Gaia.
- Sessa C. y otros (2007). Geometría. Aportes para la enseñanza en el nivel medio. Dirección de currícula. Ministerio de Educación G.C.B.A, Capítulo 2. Accesible en: http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/currricula/media/matematica/geometria_media.pdf
- Sessa, C. y otros (2015). Hacer matemática 1/2. Ed. Estrada S.A. Buenos Aires, Argentina.